Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Dr. Hermann Gerlach,
Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium zu Parchim.

Erster Theil.

Erster Cursus der Arithmetik.

Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.

Dessau.
Verlag von A. Desbarats.
1867.

Druck von Weniger & Co in Dessau.

Vorwort.

Die Mathematik nimmt unter den übrigen Unterrichtsgegenständen eine eigenthümliche Stellung ein, insofern ihre Bedeutung gar zu verschieden beurtheilt wird. Daß sie für das praktische Leben von größter Wichtigkeit ist, und daß viele Schüler ihres späteren Berufes wegen sich eingehend mit ihr beschäftigt haben müssen, stellt Niemand in Abrede. Theoretisch wird auch zugestanden, daß die Mathematik nebst den Sprachen die Grundlage jeder wissenschaftlichen Bildung sein müsse, aber das Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω kommt nicht aus voller Ueberzeugung. Man meint, die Mathematik vermöge zwar in weit höherem Grade die Intelligenz zu fördern, als jeder andere Unterrichtsgegenstand, aber diese Bedeutung werde wiederum dadurch abgeschwächt, daß zum Verständniß der mathematischen Wahrheiten eine eigenthümliche Begabung erforderlich sei, daß also die Mathematik den Character eines ganz allgemeinen Bildungsmittels nicht habe. Diese Ansicht führt in ihrer praktischen Anwendung dahin, daß man zwar im Allgemeinen die Wichtigkeit des mathematischen Unterrichts nicht beanstandet, daß man jedoch im einzelnen Falle die Unkenntniß glaubt entschuldigen zu müssen. Hierin liegt für den Unterricht ein Hinderniß, dessen Bedeutung man nicht unterschätzen darf. Da sich die erwähnte Ansicht gewöhnlich auf die Thatsache stützt, daß die Leistungen in der Mathematik nicht immer dem angewendeten Fleiße entsprechen, so läßt sich ihr schädlicher Einfluß schwerlich dadurch beseitigen, daß man sie für ein bloßes Vorurtheil erklärt; eher möchte es gelingen, wenn man ihre Berechtigung anerkennt, aber auf das richtige Maß zurückführt.

Als Wissenschaft ist natürlich die Mathematik nicht Jedem zugänglich, als Unterrichtsgegenstand aber müßte sie es mindestens für alle die Schüler sein, welche in den übrigen Zweigen des Wissens Ausreichendes zu leisten vermögen. Zuweilen können jedoch selbst begabtere Schüler bei gutem Willen den gestellten Anforderungen nicht genügen, und wenn dies immer nur von individuellen Mißgriffen herrühren sollte, so würde man es als eine Eigenthümlichkeit der Mathematik bezeichnen müssen, daß

sie häufiger als jeder andere Unterrichtsgegenstand dergleichen Mißgriffe veranlaßte. Forscht man aber in solchen Fällen nach der eigentlichen Schwierigkeit, so wird man niemals auf den gesammten mathematischen Unterricht, immer nur auf ein bestimmtes Gebiet desselben hingewiesen, auf das Gebiet der Aufgaben. Dies läßt sich auch recht gut erklären. So lange nämlich nur das Verständniß und die Reproduction des Vorgetragenen verlangt wird, bleibt der Schüler auf dem gewohnten Boden der geistigen Thätigkeit. Dasselbe gilt von der Bearbeitung solcher Aufgaben, welche nach bestimmten Regeln und Vorschriften fast mechanisch gelöst werden können, wie z. B. die meisten Reductionsaufgaben und algebraischen Gleichungen. Anders aber ist es, wenn eine gewisse Erfindungsgabe, eine gewisse Fähigkeit des Combinirens beansprucht wird, wie bei den geometrischen, oder den in Worten gegebenen algebraischen Aufgaben. Zwar giebt der Unterricht auch für solche Fälle eine ausreichende Anleitung, und erfahrungsmäßig führt die fortgesetzte Uebung zu einer größeren oder geringeren Gewandtheit, aber es bleibt dessenungeachtet bedenklich, die glückliche Lösung gerade dieser oder jener Aufgabe als Postulat zu stellen; hierbei beruht der Erfolg häufig auf einer besonderen Anlage, oder auf einer Neigung, die weit über die bloße Pflichterfüllung hinausgeht. Eine Hauptschwierigkeit des mathematischen Unterrichts wird sich daher heben lassen, wenn man im angegebenen Sinne scharf unterscheidet zwischen den Leistungen, die man von jedem Schüler verlangt, und denen, die man zwar von allen Schülern wünscht, aber nur von einzelnen erwarten darf. Je mehr das Verständniß des theoretischen Theiles in den Vordergrund tritt, desto weniger wird die Mathematik unzugänglich erscheinen.

Aber auch dann bleibt noch eine große Schwierigkeit zu überwinden: die Mathematik verlangt einen sehr stetigen Fleiß. Die einzelnen Abschnitte derselben laufen nur selten parallel nebeneinander, so daß man sich beliebig mit dem einen oder dem andern beschäftigen könnte; meistens sind sie so fest ineinandergefugt, daß der folgende nur mit Hülfe des vorangehenden verstanden werden kann, daß also jede größere Unterbrechung des Zusammenhanges den weiteren Fortschritt hemmt. Nun sind Lücken in den Kenntnissen eine häufige Erscheinung, deren einzelne Gründe nicht erst erörtert zu werden brauchen, und das Bestreben, sie sofort auszufüllen, ist nicht immer vorhanden. Während es aber z. B. denkbar ist, daß ein Schüler in einer

fremden Sprache die Conjugation erlernt, ohne daß er die Declination inne hätte, so ist es für ihn völlig unmöglich, ohne Kenntniß des Multiplicirens das Dividiren zu begreifen. Jeder derartige Versuch muß fehlschlagen, doch liegt der Grund nicht in der Schwierigkeit des Dividirens, und ebensowenig ist der Versuch, fleißig sein zu wollen, wirklicher Fleiß. Ein sicheres Fortschreiten im Verständniß der Mathematik entspringt nur aus einem stetigen Fleiße, der keine andauernde Unterbrechung des Zusammenhanges duldet.

Sind nun die etwa entstandenen Lücken nicht zu bedeutend, so müssen sie im Allgemeinen ohne ausgedehnte Beihülfe des Lehrers ausgefüllt werden können. Der Schüler ist alsdann vorzugsweise auf sein Lehrbuch angewiesen, und dieses muß sich daher innerhalb gewisser Gränzen zum Selbstunterrichte eignen. Es muß also, gleich weit entfernt von ermüdender Breite wie von unverständlicher Kürze, den wesentlichen Theil des Vorgetragenen enthalten, die einzelnen Wahrheiten klar und gesondert hinstellen, gleichsam jeden Schritt, der gethan werden soll, dem Unkundigen angeben. Wiederum soll es aber auch, was freilich in vielen Fällen nur dem mündlichen Vortrage gelingt, den inneren Zusammenhang erkennen lassen, das Ziel zeigen, zu dem jeder Schritt hinführt, so daß das Einzelne nicht bloß als fertige, in sich abgeschlossene Wahrheit dasteht, sondern als Endglied einer bestimmten Gedankenreihe, oder als Anfangsglied einer neuen. Dabei hat es zu berücksichtigen, daß die verschiedenen Altersstufen in ungleicher Art auffassen. Der Anfänger liest noch nicht zwischen den Zeilen, verfährt auch nicht heuristisch, sondern lernt, was im Buche steht; man darf daher nicht zu früh erwarten und verlangen, daß bloße Andeutungen in angemessener Art benutzt werden. Ferner ist auf den ersten Stufen das Verständniß einer Wahrheit nicht immer die Wurzel, ihre Anwendung die Frucht, sondern die mechanische Fertigkeit geht gewöhnlich dem Verständniß voraus, so daß das Beispiel wichtiger erscheint, als der Beweis. Insofern endlich der Fortschritt vom Leichteren zum Schwereren nicht immer mit der strengen Consequenz der wissenschaftlichen Entwicklung harmonirt, so muß der methodische Gang noch andere Gesetze befolgen, als der systematische. Er wird also vorzugsweise vom besonderen Fall ausgehen und aus diesem das allgemeine Gesetz abzuleiten suchen, wird aber jede allgemeinere Betrachtung, die dem Schüler noch unverständlich wäre, einer späteren Stufe vorbehalten.

Wenn von der vermittelnden Thätigkeit des Lehrers, ebenso vom stetigen Fleiße der Schüler als von etwas Selbstverständlichem abgesehen wird, so erscheint also das Gedeihen des mathematischen Unterrichts abhängig von folgenden Bedingungen: die Anforderungen an die mathematische Erfindungsgabe müssen möglichst beschränkt werden, und das Lehrbuch muß eine sichere Stütze für den häuslichen Fleiß sein, so daß es dem strebsamen Schüler das Vertrauen auf die eigene Kraft erweckt und fördert.

In der eben ausgesprochenen Forderung ist der Plan des vorliegenden Lehrbuches enthalten. Wenn es seinem Hauptzwecke genügt und dadurch zur Förderung des mathematischen Unterrichts beiträgt, so wird der sachkundige Leser die einzelnen Mängel, von denen niemals ein Versuch frei ist, mit Nachsicht beurtheilen dürfen.

In Betreff des ersten Theiles ist nur noch Weniges hinzuzufügen. Der erste Cursus der Arithmetik soll ungefähr den Bedürfnissen eines Progymnasiums entsprechen. Das Capitel von den algebraischen Gleichungen geht zwar theilweise weit über dieses Ziel hinaus, doch wäre es nicht zweckmäßig gewesen, hier den Zusammenhang zu unterbrechen. Im ersten Capitel, welches von den vier Species handelt, sind die Beweise für verschiedene Sätze nur angedeutet und zwar aus dem Grunde, weil der Schüler in der ersten Zeit auch die ausführlichen Beweise nicht vollständig versteht, während er sie späterhin mit Hülfe der gegebenen Andeutungen selbständig finden kann. Der strenge Beweis für die allgemeine Gültigkeit der hier aufgestellten Formeln folgt erst im dritten Theile, eine Anordnung, deren Grund bereits angegeben worden ist.

Von der früheren Auflage unterscheidet sich die vorliegende in vielen Einzelheiten, die nicht alle namhaft gemacht werden können. Völlig umgearbeitet ist das Capitel von den ganzen Potenzen und Wurzeln. In den Aufgaben am Schluß der einzelnen Capitel sind ebenfalls einige Veränderungen eingetreten. Damit hierdurch bei gleichzeitigem Gebrauche beider Auflagen in einer Klasse nicht zu große Unbequemlichkeiten entstehen, sind die neu aufgenommenen Aufgaben durch ein Kreuz (†) bezeichnet, und denen, welche eine andere Nummer erhalten haben, ist die frühere mit kleineren Ziffern beigefügt.

H. Gerlach.

Inhalt.

Erster Cursus der Arithmetik.

Berichtigungen.

Seite 72, Zeile 13 lies 1200x statt 120x.

Seite 91, Aufgabe 22 lies $= 1\frac{1}{2}$ statt $= \frac{1}{12}$.

Seite 115, Zeile 3 lies öfter statt so oft.

Seite 121, Zeile 4 lies $-\frac{1}{2} \mp$ statt $-\frac{2}{1} \mp$.

Seite 126, Zeile 6 von unten lies $\sqrt{a + p}$ statt $\sqrt{a \pm p}$.

Erster Cursus

der

Arithmetik.

Einleitung.

§. I. Erklärung.

Alles, was sich in gleichartige Theile zerlegt denken läßt, heißt **Größe** im weiteren Sinne (**Quantum**). Eine Größe kann folglich als ein Mehrfaches des einzelnen Theiles dargestellt werden. Zur Bezeichnung des Einfachen oder Mehrfachen (der Menge) dienen die **Zahlen**. Eine **benannte Zahl** bezeichnet eine bestimmte Menge gleichartiger Dinge und heißt **Größe** im engeren Sinne (**Quantität**); eine unbenannte Zahl bezeichnet nur die Menge, ohne die Dinge selbst zu nennen, und wird deshalb nicht zu den Größen gerechnet. Die unbenannten Zahlen bilden eine fortlaufende Reihe, die **Zahlenreihe**.

§. II. Erklärung.

Die **Mathematik** ist die Lehre von den Größen. Diese sind entweder sinnlich wahrnehmbar, oder sind, wie Raum und Zeit, bloße Begriffe. Mit letzteren beschäftigt sich die **reine**, mit ersteren die **angewandte** Mathematik. Insofern die Vergleichung zweier Größen im Allgemeinen davon ausgeht, daß dieselben als benannte Zahlen dargestellt werden, während hingegen die Raumgrößen noch eine andere Art der Vergleichung zulassen, nämlich das Aufeinanderlegen, so zerfällt die reine Mathematik in einen allgemeinen Theil, die **Arithmetik** oder Zahlenlehre, und in einen besonderen, die **Geometrie** oder Raumgrößenlehre. Die Arithmetik endlich wird eingetheilt in **reine Arithmetik** und **allgemeine Größenlehre** oder in die Lehre von den unbenannten und von den benannten Zahlen, welcher letztere Theil sich indessen nur als besonderer Fall der Anwendung an den ersteren anschließt.

Arithmetik.

Erstes Kapitel.

Von den vier Species.

§. 1. Erklärung.

Rechnen heißt zwei oder mehr Zahlen *) zu einer einzigen verbinden. Man bezeichnet beim Rechnen die Zahlen durch Ziffern, oder durch Buchstaben. In letzterem Falle ist unter einem Buchstaben jede nur mögliche Zahl zu verstehen. Wird indeß bei einer Rechnung ein Buchstabe wiederholt gebraucht, so soll er alsdann immer die nämliche Zahl bezeichnen. Die Darstellung einer Zahl oder einer Zahlenverbindung nennt man im Allgemeinen einen Ausdruck.

§. 2. Erklärung.

Die Zahl a ist gleich der Zahl b, wenn beide in der Zahlenreihe dieselbe Stelle einnehmen. Zur Bezeichnung dieser Eigenschaft schreibt man

$$a = b \text{ (ausgesprochen a gleich b).}$$

Das Zeichen $a = b$ nennt man eine Gleichung, a und b die Seiten derselben. Ist $a = b$, so kann man a statt b setzen, und umgekehrt.

Die Zahl a ist größer als die Zahl b (oder b ist kleiner als a), wenn a eine spätere Stelle in der Zahlenreihe einnimmt als b. Zur Bezeichnung dieser Eigenschaft schreibt man

---

*) Unter der einfachen Bezeichnung „Zahl" ist eine unbenannte Zahl zu verstehen.

a > b (ausgesprochen a größer b), oder
b < a (ausgesprochen b kleiner a).

Das Zeichen a > b (oder b < a) nennt man eine Ungleichung, a und b die Seiten derselben. Nimmt a in der Zahlenreihe die mte Stelle nach b ein, so ist a um m Einheiten größer als b, oder b um m Einheiten kleiner als a.

§. 3. Grundsätze.

1) Es ist a = a.

2) Ist a = b, b = c, so ist auch a = c.

3) Ist a = b, b $\gtrless$ c, so ist auch a $\gtrless$ c.

4) Ist a > b, b > c, so ist auch a > c.

Anm. Eine Behauptung, deren Richtigkeit sogleich einleuchtet oder aus einer vorhergehenden Erklärung unmittelbar folgt, und welche als Grundlage für spätere Betrachtungen dienen soll, heißt Grundsatz (Axiom). Eine Behauptung, deren Richtigkeit erst aus einer Reihe von Schlüssen, dem Beweise, sich erkennen läßt, heißt Lehrsatz. Ein Beweis heißt direkt, wenn die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar aus den Schlüssen folgt; er heißt indirekt (apagogisch), wenn er zeigt, daß man bei der Annahme, die Behauptung sei unrichtig, zu einem Widerspruch mit anerkannten Wahrheiten gelangt.

§. 4. Erklärung.

Die verschiedenen Arten, Zahlen mit einander zu verbinden, nennt man Operationen. Es giebt deren sieben: das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiziren, Logarithmiren. Die vier ersten Operationen nennt man auch die vier Species.

Die Gesetze, nach welchen sich Zahlen durch die sieben Operationen mit einander verbinden lassen, werden durch Gleichungen ausgedrückt, welche Formeln oder analytische Gleichungen heißen.

A. Von der Addition.

§. 5. Erklärung.

Die Zahl b zur Zahl a addiren heißt eine Zahl suchen, die um b Einheiten größer ist als a, die folglich soviel Einheiten hat als a und b zusammen. Die gesuchte Zahl wird dargestellt durch das Zeichen a + b (ausgesprochen a plus b). Man nennt a + b eine Summe, a und b die Summanden.

Anm. Die Zahl a + b nimmt eine ganz bestimmte Stelle der Zahlenreihe ein (§. 2), und eine Summe hat daher nur einen Werth.

§. 6. Zusatz.

Man kann auch Summen aus mehr als zwei Summanden bilden. Die Ordnung, in welcher addirt werden soll, bezeichnet man alsdann durch Klammern. Man versteht z. B. unter $(6 + 3) + 4$ die Summe $9 + 4$, unter $6 + (3 + 4)$ die Summe $6 + 7$.

§. 7. Zusatz.

Aus den vorigen §§. ergiebt sich Folgendes:

1) Aendert man in einer Summe die Ordnung der Summanden, so behält man die nämliche Anzahl von Einheiten oder die nämliche Summe. Daher ist

$$a + b = b + a;$$
$$(a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).$$

Die Summanden können also in beliebiger Ordnung addirt werden, und es ist nicht nöthig, die Ordnung durch Klammern genau zu bezeichnen. Man schreibt deshalb z. B. $a + b + c$ statt $(a + b) + c$.

2) Ist $a + b = c$, so ist $c > a$ und $c > b$. Ist umgekehrt $c > a$, so ist $c = a + x$, d. h. es giebt alsdann irgend eine Zahl x, welche man zu a addiren muß, um c zu erhalten.

§. 8. Grundsatz.

Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches, oder:

1) Ist $a = b$, so ist auch $a + m = b + m$.

2) Ist $a = b$, $c = d$, so ist auch $a + c = b + d$.

B. Von der Subtraction.

§. 9. Erklärung.

Die Zahl b von der Zahl a subtrahiren heißt eine Zahl suchen, die um b Einheiten kleiner ist als a, zu der man folglich b addiren muß, um a zu erhalten. Die gesuchte Zahl wird dargestellt durch das Zeichen $a - b$ (ausgesprochen a minus b). Man nennt $a - b$ eine Differenz, a den Minuenden, b den Subtrahenden. Nach dieser Erklärung ist

$$(a + b) - b = a;$$
$$(a - b) + b = a.$$

Anm. Da die Differenz $a - b$ eine Zahl der Zahlenreihe bezeichnen soll, so muß $a > b$ sein. Alsdann hat $a - b$ nur einen Werth (§. 2.)

§. 10. Grundsatz.

Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches, oder:

1) Ist $a = b$, so ist auch $a - m = b - m$.

2) Ist $a = b$, so ist auch $m - a = m - b$.

3) Ist $a = b$, $c = d$, so ist auch $a - c = b - d$.

4) Ist $a + m = b + m$, so ist auch $a = b$.

Anm. Die Sätze 1) und 2) lassen sich umkehren.

§. 11. Lehrsätze.

1) $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$;

2) $(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$;

3) $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$;

4) $a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b$.

Beweis zu 1. Addirt man c zu jedem der drei Ausdrücke, so erhält man jedesmal a. (Vergl. §. 10, 4.)

Beweis zu 2. Addirt man $b + c$ zu jedem der drei Ausdrücke, so erhält man jedesmal a.

Beweis zu 3. Er folgt aus 2.

Beweis zu 4. Addirt man $b - c$ zu jedem der drei Ausdrücke, so erhält man jedesmal a.

Anm. 1. Die Lehrsätze 1) und 3) lassen sich in der Art erweitern, daß die vorkommenden Summen aus mehr als zwei Summanden bestehen.

Anm. 2. Die Lehrsätze der §§. 7 und 11 enthalten folgende Regeln:
Man vergrößert (verkleinert) eine Summe um irgend eine Zahl, indem man einen der Summanden vergrößert (verkleinert).

Man vergrößert (verkleinert) eine Differenz um irgend eine Zahl, indem man entweder den Minuenden vergrößert (verkleinert), oder mit dem Subtrahenden umgekehrt verfährt, d. h. denselben verkleinert (vergrößert).

Man addirt (subtrahirt) eine Summe, indem man die einzelnen Summanden nach einander addirt (subtrahirt).

Man addirt (subtrahirt) eine Differenz, indem man den Minuenden addirt (subtrahirt) und mit dem Subtrahenden umgekehrt verfährt.

§. 12. Lehrsätze.

1) $(a + m) - (b + m) = a - b$.

2) $(a - m) - (b - m) = a - b$.

3) Ist $a + b = c + d$, so ist auch $a - d = c - b$.

4) Ist $a - b = c - d$, so ist auch $a + d = c + b$.

Beweis zu 1. Es ist

$$(a + m) - (b + m) = [(a + m) - m] - b = a - b.$$

Beweis zu 2. Es ist

$$(a - m) - (b - m) = [(a - m) + m] - b = a - b.$$

Beweis zu 3. Ist $a + b = c + d$, so ist auch

$$(a + b) - (b + d) = (c + d) - (b + d), \text{ oder } a - d = c - b.$$

Beweis zu 4. Ist $a - b = c - d$, so ist auch

$$(a - b) + (b + d) = (c - d) + (b + d), \text{ oder } a + d = c + b.$$

§. 13. Erklärung.

Eine Reihe von Zahlen, die theils durch Addition, theils durch Subtraction mit einander verbunden sind, nennt man eine algebraische Summe. Die einzelnen Zahlen heißen die Glieder der Summe; ein Glied heißt additiv, wenn es addirt, subtractiv, wenn es subtrahirt werden soll.

Die Glieder einer algebraischen Summe können einfach oder zusammengesetzt sein. In ersterem Falle sollen die Zahlen genau in der Ordnung mit einander verbunden werden, wie sie einzeln von links nach rechts auf einander folgen. Man bezeichnet alsdann die Ordnung nicht weiter durch Klammern, schreibt also z. B.

$$a + b - c - d + e \text{ statt } \{[(a + b) - c] - d\} + e.$$

§. 14. Zusatz.

Eine algebraische Summe mit einfachen Gliedern läßt sich, statt von links nach rechts, auch in anderer Art berechnen. Man rechnet zunächst von links nach rechts, bis man auf das erste subtractive Glied kommt und ein Resultat von der Form $m - n$ erhält.

Ist nun das nächstfolgende Glied additiv, so addirt man es zu m (§. 11, Anm. 2); ist es subtractiv, so addirt man es zu n (§. 11, Anm. 2). Fährt man in dieser Art fort, so hat man schließlich alle additiven Glieder addirt, ebenso alle subtractiven, und hat nun noch letztere Summe von ersterer zu subtrahiren. Es ist also z. B.

$$a + b - c - d + e = (a + b + e) - (c + d).$$

Da man ein und dasselbe Resultat erhält, in welcher Ordnung auch die Glieder gestanden haben mögen, so ergiebt sich hieraus, daß man in einer algebraischen Summe mit einfachen Gliedern die Ordnung der Glieder beliebig ändern kann, wenn nur jedem derselben sein Vorzeichen (+ oder —) bleibt. Es ist also z. B.

$$a + b - c - d + e = a - c + e - d + b \text{ u. s. w.}$$

§. 15. Zusatz.

Eine algebraische Summe mit zusammengesetzten Gliedern läßt sich am leichtesten berechnen, wenn man sie zunächst in eine algebraische Summe mit einfachen Gliedern verwandelt. Man benutzt dazu die folgenden Formeln:

1) $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ (§. 7, 1);

2) $a + (b - c) = (a + b) - c = a + b - c$ (§. 11, 1);

3) $a - (b + c) = (a - b) - c = a - b - c$ (§. 11, 3);

4) $a - (b - c) = (a - b) + c = a - b + c$ (§. 11, 4).

Bestehen also die zusammengesetzten Glieder aus zwei einfachen Ausdrücken, so kann man die Klammern eines additiven Gliedes ohne Weiteres weglassen, die eines subtractiven nur dann, wenn man zugleich das Vorzeichen in der Klammer ändert. Daher ist z. B.

$$a + (b - c) - (d - e) - (f + g) + (h + i) =$$
$$a + b - c - d + e - f - g + h + i =$$
$$(a + b + e + h + i) - (c + d + f + g).$$

Bestehen die zusammengesetzten Glieder aus mehr als zwei einfachen Ausdrücken, so kann man jedes Glied in einen additiven und einen subtractiven Theil zerlegt denken (§. 11). Werden nun die Klammern gelöst, so bleibt bei einem additiven zusammengesetzten Gliede der additive Theil additiv, der subtractive subtractiv (nach 2), während bei einem subtractiven zusammengesetzten Gliede jeder der beiden Theile die entgegengesetzte Bedeutung erhält (nach 4). In ersterem Falle ändert sich folglich kein Zeichen innerhalb der Klammern, in letzterem ändern sich alle. Daher ist z. B.

$$(a + b - c) - (d - e + f - g) + (h - i + k) =$$
$$a + b - c - d + e - f + g + h - i + k =$$
$$(a + b + e + g + h + k) - (c + d + f + i).$$

Bestehen endlich die zusammengesetzten Glieder aus ebenfalls zusammengesetzten Ausdrücken, so daß kleinere Klammern von größeren eingeschlossen werden, so löst man die verschiedenen Arten von Klammern nach einander auf (nach der oben gegebenen Regel), und zwar kann man ebensowohl mit den kleineren, wie mit den größeren beginnen. Daher ist z. B.

$$[a - (b - c)] + [d - (e + f) + (g - h)] - [(k - m) - (n - p)] =$$
$$[a - b + c] + [d - e - f + g - h] - [k - m - n + p] =$$
$$a - b + c + d - e - f + g - h - k + m + n - p;$$

oder es ist

$$[a - (b - c)] + [d - (e + f) + (g - h)] - [(k - m) - (n - p)] =$$
$$a - (b - c) + d - (e + f) + (g - h) - (k - m) + (n - p) =$$
$$a - b + c + d - e - f + g - h - k + m + n - p.$$

Anm. In einer algebraischen Summe mit zusammengesetzten Gliedern läßt sich die Ordnung der Glieder beliebig ändern. (Vergl. §. 14).

§. 16. Zusatz.

Aus den vorigen §§. ergiebt sich, daß man jede algebraische Summe in eine solche mit einfachen Gliedern verwandeln kann.

Umgekehrt läßt sich aber auch jede algebraische Summe mit einfachen Gliedern in eine solche mit zusammengesetzten Gliedern verwandeln. Man kann nämlich beliebig viele Glieder in Klammern schließen: ohne Weiteres, wenn das erste derselben additiv, mit Veränderung der Zeichen, wenn es subtractiv ist. Ein vielgliedriger Ausdruck läßt sich daher in sehr verschiedener Form darstellen.

Anm. Die Mannichfaltigkeit der Darstellungsweise ist leicht aus folgenden Beispielen zu erkennen.

Um anzugeben, daß a und b die additiven, c und d die subtractiven Glieder einer algebraischen Summe sind, kann man schreiben:

$a + b - c - d$, oder $(a + b) - (c + d)$, oder $(a - c) + (b - d)$, oder $(a - d) - (c - b)$, u. s. w.

Um anzugeben, daß a und b zusammen so viel Einheiten haben, wie c und d zusammen, kann man schreiben:

$a + b = c + d$, oder $a - d = c - b$, oder $a - c = d - b$ (§. 12).

In den beiden angeführten Beispielen sind nun zwar die verschiedenen Formen gleichbedeutend, doch sind offenbar die Formen $(a + b) - (c + d)$ und $(a + b) = (c + d)$ am übersichtlichsten. Diese werden daher auch vorzugsweise angewendet, wenn die Bedeutung eines Ausdrucks oder einer Gleichung festgestellt werden soll.

§. 17. Erklärung.

Die früher gegebenen Erklärungen der Summe, Differenz und Gleichung lassen sich jetzt in einer andern Form darstellen, welche sich den Bedürfnissen der Rechnung besser anschließt.

1) Unter der Verbindung zusammengesetzter Ausdrücke durch Addition oder Subtraction soll von jetzt an die Zurückführung des Ganzen auf einen additiven und einen subtractiven Theil verstanden werden. Insbesondere soll dies für die Verbindung zweier Differenzen gelten, und sowohl die Summe $(a - b) + (c - d)$, wie auch die Differenz $(a - d) - (b - c)$ sollen beide nur angeben, daß a und c additiv, b und d subtractiv sind.

2) Unter der Gleichung $a - b = c - d$ soll verstanden werden, daß $a + d = b + c$ ist.

In Folge dieser Erklärungen läßt sich die beschränkende Bestimmung aufheben, daß der Minuend einer Differenz größer als der Subtrahend sein müsse. Dieselbe war nöthig, so lange man z. B. unter dem Zeichen

$(a-b)+(c-d)$ verstand, es solle die Zahl $(a-b)$ um $(c-d)$ Einheiten vergrößert werden; sie ist aber überflüssig, wenn dieses Zeichen nur angiebt, daß a und c additiv, b und d subtractiv sind.

Unter der Differenz $a - b$ wird daher noch immer eine solche Verbindung der Zahlen a und b verstanden, daß $(a - b) + b = a$ ist, doch braucht von jetzt an dieselbe nicht nothwendig eine Zahl der Zahlenreihe zu bedeuten und wird in diesem Sinne eine allgemeine Differenz genannt.

§. 18. Zusatz.

Mit allgemeinen Differenzen rechnet man nach den bisher aufgestellten Sätzen. Auszunehmen sind jedoch die Sätze, welche sich auf Ungleichungen beziehen (§ 7, 2), weil die Erklärung der Ungleichung $(a - b) > (c - d)$ voraussetzt, daß $(a - b)$ und $(c - d)$ Zahlen der Zahlenreihe sind.

Anm. Die bisher aufgestellten Sätze geben an, wie man in jedem einzelnen Falle z. B. mit der Differenz $(6 - 2)$ rechnen müsse, wenn man nicht $(6 - 2) = 4$ setzen, sondern die Zahlen 6 und 2 von einander trennen und einzeln mit andern Zahlen in Verbindung setzen will. Da sich nun kein Grund angeben läßt, weshalb die Rechnung ein falsches Resultat liefern sollte, wenn man mit der Differenz $(2 - 6)$ nach denselben Sätzen rechnet, so folgt das zu Anfang dieses §. Gesagte. Es läßt sich dies übrigens auch, wie an späterer Stelle gezeigt werden wird, in strenger Form beweisen.

§. 19. Erklärung.

Eine Differenz gleicher Zahlen, wie $m - m$, $n - n$ u. s. w. hat immer den nämlichen Werth, weil sich die Gleichung $m - m = n - n$ auf die Gleichung $m + n = m + n$ zurückführen läßt (§. 17). Man bezeichnet eine solche Differenz durch 0 (Null).

Die Differenz $0 = m - m$ bewirkt, wenn sie addirt oder subtrahirt wird, keine Veränderung, denn es ist:

1) $a + 0 = a + (m - m) = a + m - m = a$;

2) $a - 0 = a - (m - m) = a + m - m = a$;

3) $0 + 0 = 0 - 0 = 0$ (nach 1 und 2).

§. 20. Erklärung.

Die Differenz $m - (m + n)$, in welcher der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, läßt sich in einfacherer Form darstellen, wenn man $m - (m + n) = (m - m) - n = 0 - n$ setzt. Den Ausdruck $(0 - n)$, abgekürzt $(- n)$, nennt man eine negative Zahl, im Gegensatz zu den positiven Zahlen, den Zahlen der Zahlenreihe, welche man in entsprechender Art durch $(0 + n)$, oder $(+ n)$, oder n bezeichnet.

Läßt man bei einer Zahl unentschieden, ob sie positiv, oder negativ sein soll, so heißt sie **absolut**. So ist z. B. $7 - 5 = +2$, $5 - 7 = -2$, und der Unterschied der Zahlen 7 und 5 ist gleich der absoluten Zahl 2.

Anm. Der Ausdruck $(-n)$ hat zunächst die Bedeutung, daß n subtrahirt werden soll, ist also in dieser Beziehung mit den subtractiven Gliedern algebraischer Summen zu vergleichen. Insofern aber negative Zahlen auch addirt und subtrahirt werden können, so lassen sie sich als selbständige Zahlen betrachten und bilden gleichsam eine Fortsetzung der Zahlenreihe nach entgegengesetzter Seite. Daher ist auch subtractiv und negativ nicht gleichbedeutend. Eine Zahl kann, für sich allein genommen, positiv oder negativ sein, außerdem aber in Beziehung auf andere Zahlen additiv oder subtractiv. Positive und negative Zahlen verhalten sich also ähnlich zu einander wie Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust u. s. w.

§. 21. Lehrsätze.

I. Ist von zwei durch Addition oder Subtraction zu verbindenden Ausdrücken der erste positiv, so ergeben sich folgende Sätze:

$$1)\ (+a) + (+b) = +(a + b) = a + b;$$
$$2)\ (+a) - (+b) = +(a - b) = a - b;$$
$$3)\ (+a) + (-b) = +(a - b) = a - b;$$
$$4)\ (+a) - (-b) = +(a + b) = a + b.$$

Beweise zu 1 und 2. Man setze $+a = a$, $+b = b$ (§. 20).

Beweis zu 3. Es ist $(+a) + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = a - b$.

Beweis zu 4. Es ist $(+a) - (-b) = a - (0 - b) = a - 0 + b = a + b$.

Statt **zweier gleichen** Zeichen, die zu derselben Zahl gehören, schreibt man also das positive, statt **zweier ungleichen** das negative Vorzeichen.

II. Ist von zwei zu verbindenden Ausdrücken der erste negativ, so setzt man zunächst statt der zwei Zeichen, die zum zweiten Ausdrucke gehören, ein einfaches Zeichen (nach I). Alsdann ist ferner:

$$5)\ (-a) + b = +(b - a) = -(a - b);$$
$$6)\ (-a) - b = -(a + b).$$

Beweis zu 5. Es ist

$$(-a) + b = (0 - a) + b = 0 + (b - a) = +(b - a), \text{ oder}$$
$$(-a) + b = (0 - a) + b = 0 - (a - b) = -(a - b).$$

Beweis zu 6. Es ist $(-a) - b = (0 - a) - b = 0 - (a + b) = -(a + b)$.

§. 22. Zusatz.

Wenn bei der Berechnung algebraischer Summen sich negative Ausdrücke ergeben, so benutzt man die Formeln aus §. 21 und verfährt im Uebrigen wie früher. So ist z. B.

$$1)\ 3 - 8 - 2 + 4 + 9 = -5 - 2 + 4 + 9 = -7 + 4 + 9 = -3 + 9 = 6;$$

$$2)\ 6 - (-5) + (-3) - (+2) = 6 + 5 - 3 - 2 = 6;$$

$$3)\ (-a) - \{b + [-(c + d + e)] - [-(f + g)]\} - (-h - i) =$$
$$(-a) - \{b - (c + d + e) + (f + g)\} - (-h - i) =$$
$$(-a) - b + (c + d + e) - (f + g) + (h + i) =$$
$$-a - b + c + d + e - f - g + h + i =$$
$$(c + d + e + h + i) - (a + b + f + g);$$

$$4)\ -[-(-a)] = -[+a] = -a.$$

§. 23. Zusatz.

Es ist $+(b - a) = -(a - b)$ (§. 21, 5), und man kann also, wenn irgend ein Ausdruck addirt werden soll, denselben mit veränderten Zeichen subtrahiren, und umgekehrt. Daher ist z. B.

$$a + (b - c + d - e - f) = a - (-b + c - d + e + f);$$
$$m - (-n + v - w) = m + (+n - v + w).$$

Ferner kann man jede algebraische Summe so umformen, daß sämmtliche Glieder additiv sind, z. B.

$$a - b - c + d \quad \text{in} \quad a + (-b) + (-c) + d.$$

C. Von der Multiplication.

§. 24. Erklärung.

Die Zahl a mit der Zahl b multipliciren heißt eine Summe bilden aus b Summanden, von denen jeder a ist. Diese Summe wird dargestellt durch das Zeichen a . b oder ab (a mal b). Man nennt ab ein Produkt, a den Multiplicanden, b den Multiplicator, oder auch a den ersten, b den zweiten Faktor. Nach dieser Erklärung ist

$$a \,.\, b = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \,..\, + \overset{b}{a}\text{*)};$$
$$3 \,.\, 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3.$$

*) Die Zahlen 1, 2, 3 ... sollen die Bedeutung von Nummern haben; es soll also heißen: erstes a, zweites a, u. s. w.

Ist $a b = c$, so ist c $b$mal so groß als a, oder a $b$mal so klein als c, oder a der $b$te Theil von c.

Anm. 1. Der Multiplicator eines Produkts muß nothwendig eine Zahl der Zahlenreihe sein, und es kann alsdann ein Produkt nur einen Werth haben (§. 5, Anm. und §. 18). Für die nächsten §§. soll vorausgesetzt werden, daß auch der Multiplicand eine Zahl der Zahlenreihe sei.

Anm. 2. Die Erklärung des Produkts setzt eigentlich voraus, daß die Faktoren von 1 verschieden sind. Der Gleichmäßigkeit wegen soll indeß auch gesetzt werden

$$a = a \,.\, 1 \text{ und } a = 1 \,.\, a.$$

§. 25. Grundsatz.

Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches, oder:

1) Ist $a = b$, so ist auch $a \,.\, m = b \,.\, m$.

2) Ist $a = b$, $c = d$, so ist auch $a \,.\, c = b \,.\, d$.

§. 26. Lehrsätze.

1) $a \,.\, b = b \,.\, a$;

2) $(a \,.\, b) \,.\, c = (a \,.\, c) \,.\, b = a \,.\, (b \,.\, c)$.

Beweis zu 1. Zerlegt man ein beliebiges Produkt, z. B. $3 \,.\, 4$, in seine Einheiten, so erhält man

$$\begin{aligned} 3 \,.\, 4 &= 3 + 3 + 3 + 3 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + \\ & 1 + 1 + 1 + 1 + \\ & 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Addirt man wiederum diese Einheiten, so erhält man entweder $3 \,.\, 4$, oder $4 \,.\, 3$, je nachdem man von unten nach oben, oder von links nach rechts addirt. In derselben Art läßt sich aber der Beweis für jedes Produkt führen.

Beweis zu 2. Man löse ein derartiges Produkt, z. B. $(4 \,.\, 3) \,.\, 5$, in die einzelnen Summanden 4 oder 3 auf und verfahre wie bei 1).

Anm. Nach 1) und 2) ist die Ordnung der Faktoren beliebig. Daher haben sie auch einen gemeinschaftlichen Namen, und man schreibt Produkte höchstens mit einer Klammer, z. B. $(abcdef)$. Aus 2) folgt, daß man ein Produkt multiplicirt, indem man einen der Faktoren multiplicirt.

§. 27. Lehrsätze.

1) $(a + b) \,.\, c = ac + bc$;

2) $c \,.\, (a + b) = ca + cb$;

3) $(a - b) \,.\, c = ac - bc$;

4) $c \,.\, (a - b) = ca - cb$;

5) $(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd;$

6) $(a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd.$

Beweis zu 1. Es ist $(a + b)c = (a \overset{1}{+} b) + (a \overset{2}{+} b) + (a \overset{3}{+} b) + \ldots + (a \overset{c}{+} b) = (a + a + a + \ldots) + (b + b + b + \ldots) = ac + bc.$

Beweis zu 2. Er folgt aus 1 und aus §. 26, 1.

Beweise zu 3 und 4. Sie werden geführt, wie die Beweise zu 1 und 2.

Bew. zu 5. Es ist $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$

Bew. zu 6. Es ist $(a - b)(c - d) = (a - b)c - (a - b)d = (ac - bc) - (ad - bd) = ac - bc - ad + bd.$

Anm. zu 1—4. In ähnlicher Art läßt sich auch beweisen, daß

$$(a + b - c - d + \ldots) m = am + bm - cm - dm + \ldots,$$
$$m \cdot (a + b - c - d + \ldots) = ma + mb - mc - md + \ldots$$

ist. Man multiplicirt also eine algebraische Summe, oder mit einer algebraischen Summe, indem man jedes einzelne Glied, oder mit jedem einzelnen Gliede multiplicirt.

§. 28. Erklärung.

Unter der Verbindung zusammengesetzter Ausdrücke durch Multiplication soll von jetzt an die Verwandlung des Ganzen in eine algebraische Summe (nach §. 27) verstanden werden. Insbesondere soll dies für Verbindungen von Differenzen gelten, so daß also unter dem Produkte $c(a - b)$ nur die Differenz $ca - cb$, unter dem Produkte $(a - b)(c - d)$ nur die algebraische Summe $ac - bc - ad + bd$ verstanden wird. In Folge dieser erweiterten Erklärung kann nun auch die Bestimmung aufgehoben werden, daß die Faktoren eines Produktes positive Zahlen sein müssen; denn wenn unter dem Produkt $c(a - b)$ nur die Differenz $ca - cb$ verstanden werden soll, so kann $a - b$ eine allgemeine Differenz sein. In diesem Sinne werden die Produkte $c(a - b)$ und $(a - b)(c - d)$ Differenzprodukte genannt.

§. 29. Zusatz.

Mit Differenzprodukten rechnet man nach den bisher aufgestellten Sätzen.

Anm. Vergl. §. 18, Anm.

§. 30. Lehrsätze.

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0;$

2) $0 \cdot 0 = 0;$

3) $(+a) \cdot (+b) = +ab$;
4) $(-a) \cdot (+b) = -ab$;
5) $(+a) \cdot (-b) = -ab$;
6) $(-a) \cdot (-b) = +ab$.

Beweis zu 1. Es ist $a \cdot 0 = a \cdot (m - m) = am - am = 0$.

Beweis zu 2. Er folgt aus 1.

Beweis zu 3. Er ergiebt sich, wenn man $+a = a$, $+b = b$ setzt.

Beweis zu 4. Es ist $(-a) \cdot (+b) = (0 - a) \cdot b = 0 \cdot b - a \cdot b = -ab$.

Beweis zu 5. Es ist $(+a) \cdot (-b) = a \cdot (0 - b) = a \cdot 0 - a \cdot b = -ab$.

Beweis zu 6. Es ist $(-a) \cdot (-b) = (0 - a) \cdot (0 - b) = 0 \cdot 0 - a \cdot 0 - 0 \cdot b + a \cdot b = +ab$.

Anm. Ein Produkt, welches den Faktor 0 enthält, ist gleich 0. In Produkten aus positiven und negativen Zahlen geben zwei gleiche Zeichen das positive, zwei ungleiche das negative Vorzeichen. Es ist folglich $(+a) \cdot (-b) = (-a) \cdot (+b)$, also auch z. B. $(-a) \cdot (b - c) = (+a) \cdot (c - b)$, ferner $(a - b) \cdot (c - d) = -(b - a) \cdot (c - d) = -(a - b)(d - c) = +(b - a)(d - c)$. (Vergl. §. 23.)

§. 31. Zusatz.

Die Formeln des §. 27, welche auch für Differenzprodukte gelten, können benutzt werden, um algebraische Summen in Produkte zu verwandeln. Es ist nämlich (§. 27, Anm.)

$$ma + mb - mc - md \ldots = m(a + b - c - d \ldots),$$

folglich auch $6a + 4a - 2a = a(6 + 4 - 2) = 8a$,

$$3a - 5a = a(3 - 5) = a \cdot (-2) = -2a,$$

$$7abc + 14abd - 28fab = 7ab(c + 2d - 4f).$$

Man sucht also in derartigen Fällen den in allen Summanden vorkommenden Faktor (den gemeinschaftlichen) und multiplicirt ihn mit der algebraischen Summe der übrigen Faktoren.

Anm. Die Zurückführung eines gegebenen Ausdrucks auf einen andern von einfacherer oder bequemerer Form nennt man eine Reduction.

§. 32. Zusatz.

Bei der Berechnung algebraischer Summen, deren Glieder Produkte sind, betrachtet man Produkte aus einfachen Ausdrücken wie einfache Glieder, und Produkte aus zusammengesetzten Ausdrücken verwandelt man (nach

§. 27) in Summen. Schließlich vereinigt man die gleichnamigen Glieder, d. h. solche, welche dieselben Buchstaben enthalten (§. 31).

§. 33. Aufgaben.

Die nachstehenden algebraischen Summen zu berechnen.

I. $(-3a + 4b - 7c + 6d) + (5b - 7c + 3d) +$
$(8a - 4c + 9b + 8d)$.

Auflösung. Man löst die Klammern, schreibt die gleichnamigen Glieder unter einander und addirt.

$$\begin{array}{rrrrr} & -3a & +4b & -7c & +6d \\ & & +5b & -7c & +3d \\ & +8a & +9b & -4c & +8d \\ \hline \text{Summe:} & +5a & +18b & -18c & +17d. \end{array}$$

II. $(3a - 5b + 7c) - (6a + 3b - 4c - 2d + 6f)$.

Auflösung. Man verfährt wie bei I. Aus äußeren Gründen kann es jedoch zuweilen zweckmäßig sein, den Subtrahenden unter den Minuenden zu schreiben und erst dann die Zeichen zu ändern.

$$\begin{array}{rrrrrr} & +3a & -5b & +7c & & \\ & \mp 6a & \mp 3b & \pm 4c & \pm 2d & \mp 6f \\ \hline \text{Differenz:} & -3a & -8b & +11c & +2d & -6f. \end{array}$$

§. 34. Aufgabe.

Das Produkt $(2a + 3b - 4c) \,.\, (4a - 6b - 2c)$ zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicirt den ersten Faktor nach einander mit $(+4a)$, $(-6b)$, $(-2c)$, schreibt die drei Resultate unter einander und addirt.

$$\begin{array}{llllll} 2a + 3b - 4c & & & & & \\ 4a - 6b - 2c & & & & & \\ \hline 8aa & +12ab & -16ac & & & \\ & -12ab & & -18bb & +24bc & \\ & & -4ac & & -6bc & +8cc \\ \hline 8aa\text{*)} & & -20ac & -18bb & +18bc & +8cc \end{array}$$

---

*) Produkte aus gleichen Faktoren, wie z. B. aa, bbb u. s. w. bezeichnet man gewöhnlich durch eine kürzere Form, nämlich aa durch a^2, aaa durch a^3, aaaa durch a^4 u. s. w. Dergleichen Ausdrücke heißen Potenzen, und zwar die 2te, 3te, 4te u. s. w. Potenz von a. Man kann diese Abkürzungen auch beim Multipliciren beibehalten. Es ist leicht zu sehen, daß z. B. $a^3 \,.\, a^2 = (aaa) \,.\, (aa) = a^{3+2} = a^5$, daher ebenso $a^3 \,.\, a^4 = a^7$ ist u. s. w.

§. 35. Aufgaben.

Die nachstehenden algebraischen Summen zu berechnen.

I. $a - b(c + d) + e(f - g) - d(h - k)$.

Auflösung. Es ist $a - b(c + d) + e(f - g) - d(h - k) =$
$a - (bc + bd) + (ef - eg) - (dh - dk) =$
$a - bc - bd + ef - eg - dh + dk =$
$(a + ef + dk) - (bc + bd + eg + dh)$.

II. $a(a + 1) - [(a + 2)(a + 3) - 5(a - 4)]$.

Auflösung. Es ist $a(a + 1) - [(a + 2)(a + 3) - 5(a - 4)] =$
$(aa + a) - [(aa + 5a + 6) - (5a - 20)] =$
$aa + a - aa - 5a - 6 + 5a - 20 =$
$aa - aa + a - 5a + 5a - 6 - 20 = a - 26$.

§. 36. Aufgaben.

I. Den Ausdruck $ac + bc + bd + ad$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist
$ac + bc + bd + ad = (ac + bc) + (ad + bd) =$
$c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d)$.

II. Den Ausdruck $ac - bc - bd + ad$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist
1) $ac - bc - bd + ad = (ac - bc) + (ad - bd) =$
$c(a - b) + d(a - b) = (a - b)(c + d)$,
oder 2) $ac - bc - bd + ad = (ac - bc) - (bd - ad) =$
$c(a - b) - d(b - a) = c(a - b) + d(a - b) =$
$(a - b)(c + d)$. (Vergl. §. 30, Anm.)

III. Den Ausdruck $aa + 8ab + 15bb$ zu reduciren.

Auflösung. Es ist
$aa + 8ab + 15bb = (aa + 5ab) + (3ab + 15bb) =$
$a(a + 5b) + 3b(a + 5b) = (a + 5b)(a + 3b)$.

Man zerlegt den zu ab gehörenden Zahlenfactor 8 in zwei Theile 5 und 3, deren Produkt gleich dem zu bb gehörenden Zahlenfactor 15 ist, setzt $8ab = 5ab + 3ab$ und verfährt wie bei I. Den Grund dieser Zerlegung erkennt man leicht, wenn man $(a + 5b)$ mit $(a + 3b)$ multiplicirt.

Ebenso ist daher z. B.:

$aa + 2ab - 15bb = aa + 5ab - 3ab - 15bb = (a + 5b)(a - 3b)$,
ferner $aa - bb = aa + ab - ab - bb = (a + b)(a - b)$.

Aufgaben.

I. Addition und Subtraction algebraischer Summen.

1) $(5a - 2b + 3c - 4e + 9d) + (7a - 8c + 9b + 5e - 6d)$;
2) $(8b + 4c - 9d - 8e) + (2c - 5b - 4f + 5e) + (3c - 5a + 5d - 7f) + (4h - 3f + 9b)$;
3) $(4b - 8c + 9d + 5f) + (7a + 3b - 6c - 3d) + (4c - 8d - 9f) + (3c - 8b - 7d)$;
4) $(8b + 4a - 2c - 3d) + (8c + 5d - 6a + 2d) + (4a - 2b - 3d + (2a - 6b - 2d - 6c)$;
5) $(8a + 2b - 7c + 4d) + (-5a + 7b - 3c - 4e) + (4c - 8d + 5g - 2c) + (9d - 5e + 8a)$;
6) $(3a - 2b + 7c - 4d) - (2a - 7b + 3c - 5d)$;
7) $(5a - 7b + 9d - 4e) - (8a + 3b - 4d + 5e)$;
8) $(3a + 2b - 7c) - (-4a + 9b - 8c - 5d)$;
9) $(2a + 4b - 8c) - (4d + 5e - 8f) + (2f - 3e + 5c) + (-3a + 8b - 7e) - (2f + 7h - 2e)$;
10) $(4c - 8a + 5d) - (2b + 3a - 4d) + (2a - 5c + 8d) - (2d - 4b + 6c)$;
11) $(-3b - 6c + 5a - 7d) - (-3c + 5d - 8a) + (9c - 3d - 4b + 8a) - (2c - 3d - 8b)$;
12) $(-3x + 5y - 8z) - (4x + 3z - 7f + 4h) + (5d - 4h + 7m) - (8x + 4y - 7z)$;
13) $6x - (5y + 7x - 8z - 9d) + (8y + 5x + 4z - 2d) - (3d - 5x - 6y + 5z)$;
14) $(7xy - 5zz) - (6yz - 8zz + 2xy - 9xz) - (8yz - 7xy) + (12zz + 8xy - 3xz - 5yz)$;
15) $(9mnp - 7mvn + 3mnz) - (4mnv + 8znm) - (3mnp + 7vmn - 2mnz)$;
16) $(-9pqs + 4mnx - 3xyz) - (-4mxn + 7psq) + (-2xmn - 8xyz + 5pqs)$;
17) $3m - [6n - (8p - 5m + 3g)] - [3p - (5n - 2g)]$;
18) $\{[k - (6m + 5n) + 6p] - [2p - (7k + 8m - 2n + 4p)] + 2k\}$;
19) $5v - \{7w - [[6x - (8y - 4z) + 5v] - [3w + 6v - (4x + 5y) - (8v - 6y)]]\}$.

II. Multiplication algebraischer Summen.

20) $(4a + 6b - 5c + 3d) \cdot (-3a - 2b + 12c - 30d)$;
21) $(4m + 5n + 6p - 2v - 3w) \cdot (-4m + 3n + 6p - 2v + 5w)$;
22) $(5f - 3g + 2h + 3k) \cdot (5f + 3g - 2h + 3k)$;
23) $(6x - 3y + 5z) \cdot (6x + 3y - 5z)$;
24) $(15k + 2m + 7n + 9p) \cdot (-3k - 2m + 7n + 9p)$;
25) $(6ab + 4ac - 3bc - 6bd + 3cd) \cdot (-6ab + 3acd - 12bc - 3bcd)$;
26) $(5abc - 3bccd + 6bdd - 3ccd) \cdot (5abc + 3bccd + 6bdd + 3ccd)$;
27) $(vvv + 3vvw + 3vww + www) \cdot (vv + 2vw + ww)$.

III. Berechnung zusammengesetzter algebraischer Summen.

28) $(2 + a) \cdot (3 - a) + 4aa - (3 - a) \cdot (4 - a) \cdot (1 + 2a) + 2aaa$;
29) $3x \cdot (5xx - 2xy + yy) - (2xx + 5xy) \cdot (4x - 2y) - 3xyy$;
30) $8vv + 3v \cdot (2 - v) \cdot (5 + v) - 4v - 6v \cdot (5 - 2v + 3vv)$;
31) $-(6 - 8b) \cdot (3c + 5) + (8a - 2c + 9) \cdot (12b + 5) - \{(24a + 5) \cdot (4b - 2) - (3a + 7) \cdot 6\}$;
32) $6a - \{[3b - 2c] \cdot 5 - (2a - 7) \cdot (3b - 8) + (4c - 5) \cdot 6\} - (3a + 5) \cdot (2b - 7)$;
33) $(3v + 2w) \cdot (4z + 8) - \{(7w + 3) \cdot 8 - (4v + 5) \cdot (2 - 3z) + (4z - 7) \cdot (2w + 3)\}$;
34) $-\{(8a - 2) \cdot 5b - 10c + 3a \cdot (2c + 3b + 7)\} + \{2b - 5a \cdot (3 - 8b) - 3c \cdot (3a + 7)\}$;
35) $(4a + 2b) \cdot (3a - 2b) \cdot (4c + 5) - \{4bc \cdot (4b - 2a) + 2 \cdot [6aa (4c + 5) - 5b \cdot (a + 2b)]\}$;
36)† $(2x - 1) \cdot (3x + 5) \cdot (2 - x) - [(x - 1) \cdot (x - 7) + xx \cdot (x + 5)]$;
37)† $(x + 2) \cdot (3 - x) \cdot (1 - x) + xx \cdot (1 - x) - [(2 - x) \cdot (3 + 2x) - x \cdot (x + 5)]$.

IV. Vermischte Reductionen.

38) $12aacd - 18accb + 9aacc$; 39) $8ccdd - 32cdde - 4cd$;
40) $2xxyz - 6xxyv - 2xy$; 41) $6mn (mp + 2pw) - 6mp$;
42) $3bcd (3d - 2a) - 12cd$; 43) $4da (3eb + 4ec) - 4fe (5dd - 4de)$;
44) $12ac + 8cb + 15ad + 10bd$; 45) $42ac + 35cd + 30a + 25d$;
46) $12abc + 15ccd + 4ab + 5cd$; 47) $10xx - 12xy + 35x - 42y$;
48) $15mn - 18pn + 25mm - 30mp$; 49) $21aabb - 35abc - 18abd + 30cd$;
50) $8bcef - 20bdef - 15cdbd + 6bcdc$; 51) $15vvw - 18vyz + 42yyz - 35vwy$; 52) $10abab - 15abcd + 21cdef - 14abef$;
53) $aa + 7ab + 12bb$; 54) $aa + 5ac + 6cc$; 55) $xx + 6x + 8$;
56) $vv - 2vw - 15ww$; 57) $xx + 6xy - 16yy$; 58) $-7ac - 18cc + aa$.

Auflösungen.

1) $12a + 7b - 5c + e + 3d$; 2) $-5a + 12b + 9c - 4d - 3e - 14f + 4h$;
3) $7a - b - 7c - 9d - 4f$; 4) $4a - d$; 5) $11a + 9b - 8c + 5d - 9e + 5g$;
6) $a + 5b + 4c + d$; 7) $-3a - 10b + 13d - 9e$; 8) $7a - 7b + c + 5d$;
9) $-a + 12b - 3c - 4d - 13e + 8f - 7h$; 10) $-7c - 9a + 15d + 2b$;
11) $b + 4c + 21a - 12d$; 12) $-15x + y - 4z + 7f - 8h + 5d + 7m$;
13) $9x + 9y + 7z + 4d$; 14) $20xy - 19yz + 15zz + 6xz$;
15) $6mnp - 18mvn - 3mnz$; 16) $-11pqs + 6mnx - 11xyz$;
17) $-2m - n + 5p + g$; 18) $10k + 2m - 7n + 8p$;
19) $12v - 10w + 10x - 9y + 4z$;

20) $-12aa - 26ab + 63ac - 129ad - 12bb + 82bc - 186bd - 60cc + 186cd - 90dd$;
21) $-16mm - 8mn + 32mw + 15nn + 48np - 16nv + 16nw + 36pp - 24pv + 12pw + 4vv - 4vw - 15ww$;
22) $25ff + 30fk - 9gg + 12gh - 4hh + 9kk$;
23) $36xx - 9yy + 30yz - 25zz$;
24) $-45kk - 36km + 84kn + 108kp - 4mm + 49nn + 81pp + 126np$;
25) $-36aabb - 24aabc - 54abbc + 36abbd - 18abcd + 18aabcd + 12aaccd - 21abccd - 18abcdd + 9accdd - 48abcc - 18abbcd + 36bbcc + 72bbcd - 36bccd + 9bbccd + 18bbcdd - 9bccdd$;
26) $25aabbcc + 60abbcdd - 9bbccccdd - 18bccccdd + 36bbdddd - 9ccccdd$;
27) $vvvvv + 5vvvvw + 10vvvww + 10vvwww + 5vwwww + wwwww$;
28) $-6 - 16a + 16aa$;
29) $7xxx - 22xxy + 10xyy$; **30)** $-4v + 11vv - 21vvv$;
31) $-28c + 67 + 128b + 106a$; **32)** $11a - 46b - 14c + 121$;
33) $32v - 26w - 27z + 7$; **34)** $12b - 11c - 15ac - 9ab - 36a$;
35) $-32cbb$; **36)** $-7xxx - xx + 27x - 17$; **37)** $2xx - x$;
38) $3ac(4ad - 6bc + 3ac)$; **39)** $4cd(2cd - 8de - 1)$; **40)** $2xy(xz - 3xv - 1)$;
41) $6mp(mn + 2nw - 1)$; **42)** $3cd(3bd - 2ba - 4)$;
43) $4de(3ab + 4ac - 5df + 4fe)$; **44)** $(3a + 2b)(4c + 5d)$;
45) $(6a + 5d)(7c + 5)$; **46)** $(4ab + 5cd)(3c + 1)$; **47)** $(5x - 6y)(2x + 7)$;
48) $(5m - 6p)(3n + 5m)$; **49)** $(3ab - 5c)(7ab - 6d)$;
50) $b(2c - 5d)(3cd + 4ef)$; **51)** $(5vw - 6yz)(3v - 7y)$;
52) $(5ab - 7ef)(2ab - 3cd)$; **53)** $(a + 3b)(a + 4b)$;
54) $(a + 2c)(a + 3c)$; **55)** $(x + 4)(x + 2)$;
56) $(v - 5w)(v + 3w)$; **57)** $(x + 8y)(x - 2y)$; **58)** $(a + 2c)(a - 9c)$.

D. Von der Division.

§. 37. Erklärung*).

Die Zahl a durch die Zahl b dividiren heißt eine Zahl suchen, welche bmal so klein ist als a, welche man folglich mit b multipliciren muß, um a zu erhalten. Die gesuchte Zahl wird dargestellt durch das Zeichen $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ (a dividirt durch b). Man nennt $a : b$ einen Quotienten, a den Dividenden, b den Divisor. Nach dieser Erklärung ist

$$(a \,.\, b) : b = a; \qquad a : 1 = a;$$
$$(a : b) \,.\, b = a; \qquad a : a = 1.$$

---

*) Die §§. 37 — 40 stimmen mit §§. 9 — 12 fast wörtlich überein.

Anm. 1. Ist $a \,.\, b = c$, so ist $a = (c : b)$ der bte Theil von c, und die Zahl $b = (c : a)$ giebt an, wie oft a in c enthalten ist. Man müßte daher eigentlich zwischen „Theil" und „Quotient" unterscheiden. Weil jedoch $a \,.\, b = b \,.\, a$ ist, so kann $a = (c : b)$ ebensowohl als „Theil", wie als „Quotient" betrachtet werden.

Anm. 2. Sind a und b Zahlen der Zahlenreihe, so ist nicht nothwendig auch $a : b$ eine solche. Für die nächsten §§. soll dies jedoch vorausgesetzt werden. Alsdann heißt $a : b$ ein ganzer Quotient und hat einen völlig bestimmten Werth, weil es nicht zwei verschiedene Zahlen der Zahlenreihe geben kann, welche, mit b multiplicirt, dasselbe Resultat liefern.

§. 38. Grundsatz.

Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches, oder:

1) Ist $a = b$, so ist auch $a : m = b : m$.

2) Ist $a = b$, so ist auch $m : a = m : b$.

3) Ist $a = b$, $c = d$, so ist auch $a : c = b : d$.

4) Ist $am = bm$, so ist auch $a = b$.

Anm. Die Sätze 1) und 2) lassen sich umkehren.

§. 39. Lehrsätze.

1) $(a \,.\, b) : c = (a : c) \,.\, b = a \,.\, (b : c)$;

2) $(a : b) : c = (a : c) : b = a : (b \,.\, c)$;

3) $a : (b \,.\, c) = (a : b) : c = (a : c) : b$;

4) $a : (b : c) = (a : b) \,.\, c = (a \,.\, c) : b$.

Beweis zu 1. Multiplicirt man jeden der drei Ausdrücke mit c, so erhält man jedesmal a (§. 38, 4).

Beweis zu 2. Multiplicirt man jeden der drei Ausdrücke mit bc, so erhält man jedesmal a.

Beweis zu 3. Er folgt aus 2.

Beweis zu 4. Multiplicirt man jeden der drei Ausdrücke mit $(b : c)$, so erhält man jedesmal a.

Anm. 1. Die Lehrsätze 1) und 3) lassen sich in der Art erweitern, daß die vorkommenden Produkte aus mehr als zwei Faktoren bestehen. Die Form des Beweises bleibt dieselbe.

Anm. 2. Die Lehrsätze der §§. 26 und 39 enthalten folgende Regeln:

Man multiplicirt (dividirt) ein Produkt, indem man einen der Faktoren multiplicirt (dividirt).

Man multiplicirt (dividirt) einen Quotienten, indem man entweder den Dividenden multiplicirt (dividirt), oder mit dem Divisor umgekehrt verfährt, d. h. ihn dividirt (multiplicirt).

Man multiplicirt (dividirt) mit einem Produkte, indem man mit den einzelnen Faktoren nach einander multiplicirt (dividirt).

Man multiplicirt (dividirt) mit einem Quotienten, indem man mit dem Dividenden multiplicirt (dividirt) und mit dem Divisor umgekehrt verfährt.

§. 40. Lehrsätze.

1) $(a \,.\, m) : (b \,.\, m) = a : b$;

2) $(a : m) : (b : m) = a : b$.

3) Ist $a \,.\, b = c \,.\, d$, so ist auch $a : d = c : b$.

4) Ist $a : b = c : d$, so ist auch $a \,.\, d = c \,.\, b$.

Beweis zu 1. Es ist $(a.m) : (b.m) = [(a.m) : m] : b = a : b$.

Beweis zu 2. Es ist $(a : m) : (b : m) = [(a : m) \,.\, m] : b = a : b$.

Beweis zu 3. Ist $ab = cd$, so ist auch $ab : bd = cd : bd$, oder $a : d = c : b$.

Beweis zu 4. Ist $a : b = c : d$, so ist auch $(a : b) \,.\, bd = (c : d) \,.\, bd$, oder $ad = cb$.

Anm. Aus 1) und 2) folgt, daß der Werth eines Quotienten sich nicht ändert, wenn man den Dividenden und den Divisor mit ein und derselben Zahl multiplicirt, oder durch ein und dieselbe Zahl dividirt. Es ist daher z. B.

$$\frac{abcdef}{efgh} = \frac{abcd}{gh}; \text{ aber nicht}$$

$$\frac{abc + d}{abe + f} = \frac{c + d}{e + f}; \text{ hingegen}$$

$$\frac{ab + ac + db + dc}{eb + ec + fb + fc} = \frac{(a + d) \,.\, (b + c)}{(e + f) \,.\, (b + c)} = \frac{a + d}{e + f}.$$

§. 41. Lehrsätze.

1) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Beweis zu 1. Es ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot c\right) : d = \frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd}$.

Beweis zu 2. Es ist $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \cdot d\right) : c = \frac{ad}{b} : c = \frac{ad}{bc}$.

§. 42. Lehrsätze.

1) $\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c}$;

2) $\frac{a}{b \mp c} = \frac{a}{b \mp c}$;

3) $a \mp \frac{b}{c} = \frac{ac \mp b}{c}$;

4) $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad \mp bc}{bd}$.

Beweis zu 1. Multiplicirt man jeden der beiden Ausdrücke mit c, so erhält man jedesmal $a \mp b$.

Beweis zu 3. Es ist $a \mp \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} \mp \frac{b}{c} = \frac{ac \mp b}{c}$ (nach 1).

Beweis zu 4. Es ist $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \mp \frac{cb}{db} = \frac{ad \mp bc}{bd}$.

Anm. Algebraische Summen werden dividirt, indem man jedes Glied dividirt. Ist hingegen der Divisor eines Quotienten eine algebraische Summe, so läßt sich ein solcher Quotient nicht in einfacher Art umformen (nach 2).

§. 43. Erklärung.

Unter der Verbindung zweier Quotienten durch eine der vier ersten Operationen soll von jetzt an die Verwandlung des Ganzen in einen einzelnen Quotienten (§§. 41 und 42) verstanden werden. Es bedeute ferner die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, daß $ad = bc$ ist (§. 40, 4). In Folge dieser erweiterten Erklärung läßt sich nun auch die Bestimmung aufheben, daß ein Quotient eine Zahl der Zahlenreihe sein müsse. Unter dem Quotienten $(a : b)$ wird daher noch immer eine solche Verbindung der Zahlen a und b verstanden, daß $(a:b).b = a$ ist, doch braucht von jetzt an $(a:b)$ nicht nothwendig eine Zahl der Zahlenreihe zu sein und wird, wenn dies nicht der Fall ist, eine gebrochene Zahl oder ein Bruch genannt, im Gegensatz zu den ganzen Quotienten oder ganzen Zahlen, den Zahlen der Zahlenreihe. Ist $\frac{a}{b}$ ein Bruch, so heißt a der Zähler, b der Nenner; ferner heißt $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, wenn $a < b$, ein unächter, wenn $a > b$ ist; die Summe aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruche heißt eine gemischte Zahl.

Anm. Da eine jede ganze Zahl sich als Bruch schreiben läßt, nämlich a als $\frac{a}{1}$, so sind die frühern Erklärungen als besondere Fälle in der eben gegebenen erhalten.

§. 44. Zusatz.

Mit Brüchen rechnet man nach den bisher aufgestellten Sätzen. Die in §. 7, 2 angeführten Sätze sind ebenfalls noch richtig, wenn die vorkommenden Buchstaben positive gebrochene Zahlen bezeichnen.

Anm. Vergleiche §. 18.

§. 45. Erklärung.

Der Quotient a : b heißt ein Differenzquotient, wenn a und b beliebige Differenzen ganzer oder gebrochener Zahlen vorstellen, und bedeutet eine Zahlenverbindung von der Eigenschaft, daß $(a:b) \,.\, b = a$ ist. Es ist folglich

1) $\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$, weil $\left(+\frac{a}{b}\right).(+b) = +a$ ist;

2) $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$, weil $\left(-\frac{a}{b}\right).(+b) = -a$ ist;

3) $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$, weil $\left(-\frac{a}{b}\right).(-b) = +a$ ist;

4) $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$, weil $\left(+\frac{a}{b}\right).(-b) = -a$ ist;

5) $\frac{0}{a} = 0$, weil $0 \,.\, a = 0$ ist.

Hingegen hat

6) der Differenzquotient $\frac{0}{0}$ einen völlig unbestimmten Werth (x), weil stets $x \,.\, 0 = 0$ ist, und ferner hat

7) der Differenzquotient $\frac{a}{0}$, wenn a von Null verschieden ist, überhaupt keinen Werth, weil es keine Zahl (y) von der Eigenschaft geben kann, daß $y \,.\, 0 = a$ ist.

§. 46. Zusatz.

Differenzquotienten, deren Nenner von Null verschieden sind, bedeuten nach vorigem §. irgend eine positive oder negative (ganze oder gebrochene)

Zahl, oder Null. Sie haben also einen völlig bestimmten Werth, und man rechnet daher mit ihnen nach den bisher aufgestellten Sätzen, soweit sich dieselben nicht auf Ungleichungen beziehen (§. 18).

Differenzquotienten mit dem Nenner Null haben hingegen eine Bedeutung, welche mit früher aufgestellten Sätzen in Widerspruch steht, denn der Quotient $0 : 0$ bedeutet jede nur mögliche Zahl, während $a : a = 1$ ist. Man würde folglich zu falschen Resultaten gelangen, wenn man unter Anwendung der früher aufgestellten Sätze durch Null dividirte, insbesondere, wenn man aus der Gleichung $a . 0 = b . 0$ ableitete, daß $a = b$ ist. Es wird daher von jetzt an für jede Rechnung vorausgesetzt, daß alle vorkommenden Divisoren von Null verschieden sind.

§. 47. Zusatz.

Jeder durch die vier ersten Operationen gebildete Ausdruck, welcher nicht den Nenner Null hat, bezeichnet nach den vorangehenden §§. irgend eine positive oder negative (ganze oder gebrochene) Zahl, oder Null, und hat nur einen einzigen Werth. Diese fünf Arten der Zahlen heißen reelle Zahlen und lassen sich durch die allgemeine Form $\frac{a - b}{c}$ darstellen, wenn a, b, c Zahlen der Zahlenreihe bedeuten. Mit reellen Zahlen rechnet man, wie dies im Einzelnen bereits gezeigt worden ist, ebenso wie mit Zahlen der Zahlenreihe. Die Lehre von den vier ersten Operationen läßt sich folglich dahin abschließen, daß die bisher aufgestellten Sätze, so weit sie sich nicht auf Ungleichungen beziehen, eine allgemeine Gültigkeit haben, daß sie aber zu falschen Resultaten führen, sobald ein Divisor den Werth Null erhält.

Anm. Es mag hier noch einmal auf die große Aehnlichkeit hingewiesen werden, welche zwischen den Erklärungen und Sätzen der einzelnen Abschnitte stattfindet. Es tritt dies besonders hervor in den Abschnitten über Subtraction und Division, in geringerem Grade in den Abschnitten über Addition und Multiplication. Eine fernere Uebereinstimmung zeigt sich, wenn man ein und dieselbe Zahlenverbindung durch verschiedene Zeichen darstellt. Setzt man z. B. $\frac{a}{b} = a . \frac{1}{b}$, so lassen sich aus den Formeln für Produkte die meisten Formeln für Quotienten ableiten.

§. 48. Aufgabe.

Eine algebraische Summe aus Quotienten zu berechnen.

Auflösung. Sind die Dividenden der einzelnen Quotienten einfache Ausdrücke, oder Produkte aus einfachen Ausdrücken, so behandelt man auch die Quotienten wie einfache Ausdrücke und verfährt wie früher. Ist aber ein Dividend zusammengesetzt, so löst man den Quotienten in einfachere Ausdrücke auf, z. B.

$\frac{a + b - c}{d}$ in $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$, schließt dieselben in Klammern und verfährt dann wie früher. So ist z. B.

$$a - \frac{b + c - d}{e} + \frac{g - (h + i)}{k} =$$

$$a - \left(\frac{b}{e} + \frac{c}{e} - \frac{d}{e}\right) + \left(\frac{g}{k} - \frac{h}{k} - \frac{i}{k}\right) =$$

$$a - \frac{b}{e} - \frac{c}{e} + \frac{d}{e} + \frac{g}{k} - \frac{h}{k} - \frac{i}{k} =$$

$$\left(a + \frac{d}{e} + \frac{g}{k}\right) - \left(\frac{b}{e} + \frac{c}{e} + \frac{h}{k} + \frac{i}{k}\right).$$

§. 49. Aufgabe.

Eine algebraische Summe aus Quotienten in einen einzigen Quotienten zu verwandeln.

Auflösung. Man formt die einzelnen Quotienten in der Art um, daß sie sämmtlich denselben Nenner haben, und zwar unter allen möglichen Nennern den kleinsten (§. 42, 4). Dieser kleinste gemeinschaftliche Nenner, welcher auch Generalnenner genannt wird, muß jeden einzelnen Nenner als Faktor enthalten, da man einen Quotienten nur dadurch auf einen andern Nenner bringen kann, daß man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt. Er wird daher gefunden, indem man sämmtliche Nenner mit einander multiplicirt; haben jedoch mehrere Nenner einen gemeinschaftlichen Faktor, so wird derselbe nur einmal in Rechnung gebracht. Sind sämmtliche Quotienten in der angegebenen Art umgeformt, so addirt man sie nach dem Satze: $\frac{a}{m} \mp \frac{b}{m} = \frac{a \mp b}{m}$.

Beispiele.

Die nachstehenden algebraischen Summen in Quotienten zu verwandeln.

I. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

Auflösung. Der Generalnenner ist bdf; folglich ist

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a\,.\,df}{b\,.\,df} + \frac{c\,.\,bf}{d\,.\,bf} + \frac{e\,.\,bd}{f\,.\,bd} = \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}.$$

II. $\frac{a}{5} + \frac{b}{3} - \frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{2c}{5}$.

Auflösung. Der Generalnenner ist 30; folglich ist

$$\frac{a}{5} + \frac{b}{3} - \frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{2c}{5} = \frac{6a}{30} + \frac{10b}{30} - \frac{15c}{30} - \frac{15a}{30} + \frac{12c}{30} =$$

$$\frac{6a - 15a + 10b - 15c + 12c}{30} = \frac{-9a + 10b - 3c}{30}.$$

III. $\frac{a}{2} - \frac{b+c}{3} - \frac{d-e}{4}$.

Auflösung. Der Generalnenner ist 12; folglich ist

$$\frac{a}{2} - \frac{b+c}{3} - \frac{d-e}{4} = \frac{6a}{12} - \frac{4b+4c}{12} - \frac{3d-3e}{12} =$$

$$\frac{6a - (4b + 4c) - (3d - 3e)}{12} = \frac{6a - 4b - 4c - 3d + 3e}{12}.$$

IV. $\frac{3a}{6a + 12} + \frac{2a}{7a + 14}$.

Auflösung. Es ist $6a + 12 = 6(a + 2)$, ferner $7a + 14 = 7(a + 2)$. Der Generalnenner ist also $6 \,.\, 7 \,.\, (a + 2)$, und folglich ist

$$\frac{3a}{6(a+2)} + \frac{2a}{7(a+2)} = \frac{3a \,.\, 7}{6(a+2) \,.\, 7} + \frac{2a \,.\, 6}{7(a+2) \,.\, 6} =$$

$$\frac{33a}{42(a+2)} = \frac{11a}{14a + 28}.$$

§. 50. Aufgabe.

Algebraische Summen aus Quotienten mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Man wendet das in §. 34 angegebene Verfahren an, unter Berücksichtigung der Sätze:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad \mp bc}{bd}.$$

Beispiel. Berechnung des Produkts

$$\left(\frac{2a}{b} + \frac{3a}{4c} - \frac{2c}{3}\right)\left(\frac{2a}{b} - \frac{3a}{4c} + \frac{3c}{5}\right).$$

$$\frac{2a}{b} + \frac{3a}{4c} - \frac{2c}{3}$$

$$\frac{2a}{b} - \frac{3a}{4c} + \frac{3c}{5}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\frac{4aa}{bb} & + \frac{3aa}{2bc} & - \frac{4ac}{3b} & & & & \\
 & - \frac{3aa}{2bc} & & & - \frac{9aa}{16cc} & + \frac{a}{2} & \\
 & & + \frac{6ac}{5b} & & & + \frac{9a}{20} & - \frac{2cc}{5} \\
\hline
\frac{4aa}{bb} & & - \frac{2ac}{15b} & & - \frac{9aa}{16cc} & + \frac{19a}{20} & - \frac{2cc}{5}.
\end{array}$$

§. 51. Aufgabe.

Eine algebraische Summe durch eine andere zu dividiren.

Auflösung. Man löst zunächst sämmtliche Klammern, ordnet beide Ausdrücke alphabetisch und führt dann die Division in folgender Weise aus. Soll z. B. $aa + 6ab + 8bb$ durch $a + 2b$ dividirt werden, so bestimmt man zunächst, wie oft das erste Glied a des Divisors im ersten Gliede aa des Dividenden enthalten ist ($a$mal). Soll nun der vollständige Divisor $a + 2b$ in einer Zahl gerade $a$mal enthalten sein, so ist dies die Zahl $(a + 2b)\,a = aa + 2ab$. Diesen Ausdruck trennt man durch Subtraction vom Dividenden und erhält:

$$\frac{aa + 6ab + 8bb}{a + 2b} = \frac{aa + 2ab}{a + 2b} + \frac{4ab + 8bb}{a + 2b} = a + \frac{4ab + 8bb}{a + 2b}.$$

Mit dem Quotienten $\frac{4ab + 8bb}{a + 2b}$ verfährt man ebenso. Es ist a in $4ab$ gerade $4b$ mal enthalten; für die Zahl, in welcher $a + 2b$ gerade $4b$ mal enthalten ist, findet man daher den Ausdruck $(a + 2b)\,.\,4b = 4ab + 8bb$. Da der Dividend diesem Ausdruck gleich ist, so erhält man also $a + 4b$ als Resultat der ganzen Division. Wäre letztere hiermit noch nicht völlig beendet, so würde man in der angegebenen Art weiterrechnen.

Die Berechnung führt man nach folgendem Schema aus:

$$\begin{array}{l|l|l} a + 2b & aa^{*)} + 6ab + 8bb & a + 4b \\ & aa \quad + 2ab & \\ \hline & \quad 4ab + 8bb & \\ & \quad 4ab + 8bb & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel I. Berechnung des Quotienten
(12aa — ab — 10ac — 6bb + 16bc — 8cc) : (3a + 2b — 4c).

$$\begin{array}{l|l|l} 3a+2b-4c & 12aa - ab - 10ac - 6bb + 16bc - 8cc & 4a - 3b + 2c \\ & \mp 12aa \mp 8ab \pm 16ac & \\ \hline & -9ab + 6ac - 6bb + 16bc - 8cc & \\ & \pm 9ab \qquad \pm 6bb \mp 12bc & \\ \hline & + 6ac \qquad + 4bc - 8cc & \\ & + 6ac \qquad + 4bc - 8cc & \\ \hline \end{array}$$

Die Subtractionen werden in der Art ausgeführt, daß man die Vorzeichen der Subtrahenden ändert und dann letztere addirt (§. 33, II). Läßt sich ein Glied nicht von einem gleichnamigen subtrahiren, so schreibt man es folglich mit verändertem Vorzeichen wieder hin.

Beispiel II. Berechnung des Quotienten (aa — bb) : (a — b).

$$\begin{array}{l|l|l} a - b & aa - bb & a + b \\ & aa \pm ab & \\ \hline & + ab - bb & \\ & + ab - bb & \\ \hline \end{array}$$

§. 52. Zusatz.

Sollen algebraische Summen aus Quotienten durch einander dividirt werden, so verfährt man nach §. 51, jedoch unter Berücksichtigung der Sätze:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

§. 53. Zusatz.

Bleibt bei irgend einer Aufgabe trotz fortgesetzten Dividirens ein Rest, so bricht man die Rechnung irgendwo ab, addirt aber den an dieser Stelle bleibenden Rest zu dem erhaltenen Resultate.

*) Vergleiche §. 34, Note.

Beispiel.

Berechnung des Quotienten a : (1 — a).

$$\begin{array}{l|l|l}
1 - a & a & a + aa + aaa \\
 & \mp a \pm aa & \\ \hline
 & \quad + aa & \\
 & \quad \mp aa \pm aaa & \\ \hline
 & \qquad + aaa & \\
 & \qquad \mp aaa \pm aaaa & \\ \hline
 & \qquad\quad + aaaa &
\end{array}$$

Das Resultat ist: $a + aa + aaa + \frac{aaaa}{1-a}$.

Anm. Es kann dergleichen scheinbar eintreten, wenn Divisor und Dividend nicht gleichartig alphabetisch geordnet sind. Der Einfluß der alphabetischen Ordnung ist leicht zu sehen, wenn man z. B. 6ab + aa + 8bb (statt aa + 6ab + 8bb) durch a + 2b dividirt.

Aufgaben.

I. Addition und Subtraction.

1) $\left(\frac{c}{2} - \frac{2d}{7} + \frac{3e}{8} + \frac{f}{9}\right) + \left(-\frac{2c}{3} - \frac{e}{2} + \frac{f}{3} + \frac{5d}{21}\right) + \left(-\frac{7f}{27} + \frac{8d}{21} + \frac{e}{16} - \frac{c}{3}\right) + \left(\frac{e}{8} + \frac{8c}{21} - \frac{8d}{7} - \frac{f}{9}\right)$;

2) $\left(\frac{3ab}{5} - \frac{2ac}{7} + \frac{3d}{4}\right) + \left(\frac{2a}{3} - \frac{3d}{2} + \frac{2ae}{5}\right) + \left(\frac{2ab}{3} + \frac{3d}{5} - \frac{4ae}{7}\right) + \left(-\frac{ac}{2} - \frac{4d}{5} + \frac{2a}{5}\right)$;

3) $\left(\frac{4ab}{7} + \frac{3ac}{5} - \frac{2ae}{3} + \frac{5ce}{6}\right) - \left(\frac{3ab}{2} - \frac{2ac}{3} + \frac{3ae}{4} - \frac{2ce}{7}\right)$;

4) $\left(\frac{3abc}{5} - \frac{4ac}{3} + \frac{5a}{6} - \frac{2b}{7}\right) - \left(\frac{2ab}{5} + \frac{3ac}{4} - \frac{2a}{3} + \frac{3b}{5} - \frac{c}{4}\right)$;

5) (9) $\left(\frac{3ab}{4} - \frac{5ac}{3} + \frac{6af}{7}\right) - \left(\frac{ab}{2} + \frac{3ac}{14} + \frac{5af}{6}\right) + \left(\frac{5ab}{3} - \frac{2ac}{3} + \frac{6ad}{11}\right) - \left(-\frac{2ac}{5} + \frac{9af}{7} + \frac{2ad}{3}\right)$;

6) (10) $\left(\frac{5ab}{3}+\frac{2ac}{5}+\frac{7a}{4}+\frac{b}{5}\right)-\left(\frac{ab}{2}-\frac{3b}{4}-\frac{2a}{5}+\frac{7c}{3}\right)+$
$\left(\frac{3ac}{2}-\frac{4a}{5}+\frac{2c}{5}-\frac{3b}{7}\right)-\left(-\frac{2b}{3}+\frac{3a}{5}+\frac{2c}{3}-\frac{ab}{4}\right);$

7) (11) $\frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+\frac{15a-4c}{12};$

8) (12) $\frac{6a+4b-3c}{2}+\frac{9a-5b+6c}{3}+\frac{-2b+9c}{6};$

9) (13) $\frac{x+y}{2}-\frac{3x-z}{5}+\frac{y}{3}-\frac{7y+4z}{10};$

10) (14) $5m-\left\{\left(7n+\frac{3v-4w}{2}\right)+\left(8n-\frac{6v+3w}{2}-\frac{4m+7v}{4}\right)\right\};$

11) (15) $5x-\frac{3y+2z}{2}-\left\{\frac{15y+3x-8z}{5}-\frac{2x-y-z}{3}\right\};$

12) (16) $-\left\{k-\left[\frac{2m+3n}{5}+\frac{4n-3m}{2}\right]+2m-\frac{3k+7n}{4}\right\};$

13) † $\frac{2\frac{1}{2}a-3b}{3}-\frac{3a+1\frac{1}{3}b-c}{4}+\frac{5a-\left(1\frac{2}{3}b+1\frac{1}{4}c\right)}{5};$

14) † $\frac{2\frac{2}{3}a-\left(4b+3c\right)}{4}-\frac{3\frac{1}{3}a-2\frac{1}{2}b+1\frac{1}{4}c}{5};$

15) (17) $6bce+\frac{3ae-2ed}{5}-\left\{\frac{(10bc+a-d)\,3e}{5}\right\};$

16) † $\frac{4xx-(x+2)(x+4)}{3}+\frac{3xx-(x-3)(x-4)}{4};$

17) † $\frac{3xx-(x+3)(x+4)}{2}-\frac{5xx-(2-x)(x+3)}{3}.$

II. Multiplication.

18) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}c\right);$

19) $\left(\frac{3}{2}c-5d-\frac{1}{3}ee\right)\cdot\left(\frac{1}{4}c-2d+6ee\right);$

20) † $\left(\frac{1}{3}ab+2\frac{1}{2}ac+\frac{1}{3}bc\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{5}b-\frac{1}{3}c\right);$

21) † $\left(\frac{2}{3}aa+4ab-2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}aa+2\frac{1}{2}ab-\frac{1}{3}\right);$

22) (19) $\left(\frac{6a}{b} - \frac{5b}{c} + \frac{3bc}{d} - \frac{13b}{d}\right) \cdot \left(\frac{6a}{b} + \frac{5b}{c} - \frac{3bc}{d} + \frac{13b}{d}\right);$

23) (21) $\left(\frac{2ab}{3cd} - \frac{4ac}{5bd} + \frac{2bc}{3ad}\right) \cdot \left(\frac{ab}{cd} + \frac{4ac}{3bd} + \frac{5bc}{2ad}\right);$

24) † $\left(\frac{2x}{3} + 5\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right) \cdot (6x + 4);$

25) † $\frac{3\frac{1}{2}xx - (x + 3) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)}{5} - \frac{2\frac{1}{2}xx - \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x + 1)}{1\frac{2}{3}}.$

III. Division.

26) $(9ab - 4adf + 5ac) : 3ag;$ 27) $(24abc - 12abd + 8bc) : (-4abg);$

28) $(ac + bc - cc - ad - bd + cd) : (c - d);$

29) $(6am + 15bm - 9cm + 8an + 20bn - 12cn) : (3m + 4n);$

30) $(15aa + 19ab + 42ac + 6bb + 26bc + 24cc) : (3a \quad 2b + 6c);$

31) $(56xx + 44xy + 93xz + 8yy + 104xv + 42yz + 40yv + 27zz + 90zv + 48vv) : (7x + 2y + 9z + 6v);$

32) $(8mm + 6mn - 24mp - 9nn + 16pp) : (4m - 3n - 4p);$

33) $(900gg - 60gk - 144hh + 48hk - 3kk) : (30g - 12h + k);$

34) $(6aa - 13ab + ac + 6bb + 4ad - 9bc + 4bd - 15cc + 32cd - 16dd) : (2a - 3b - 3c + 4d);$

35) $\left(\frac{a}{b} + \frac{fd}{2c} - 3ac + 7\right) : \frac{3c}{d};$ 36) $\left(\frac{3a}{2bc} - \frac{4bc}{5d} - \frac{8f}{3e}\right) : \frac{4bde}{3acf};$

37) $\left(\frac{36aa}{bb} - \frac{25bb}{cc} + \frac{30bb}{d} - \frac{130bb}{cd} - \frac{9bbcc}{dd} + \frac{78bbc}{dd} - \frac{169bb}{dd}\right) : \left(\frac{6a}{b} + \frac{5b}{c} - \frac{3bc}{d} + \frac{13b}{d}\right);$

38) $\left(\frac{3aa}{8} - \frac{17ab}{4} + \frac{107acc}{12} + 10bb - \frac{88bcc}{3} - 2cccc\right) : \left(\frac{1}{4}a - 2b + 6cc\right);$

39) $\left(\frac{5xxy}{z} - \frac{5xzv}{w} + 5xp - xy + \frac{zzv}{w} - zp\right) : \left(\frac{xy}{z} - \frac{zv}{w} + p\right);$

40) $\left(\frac{xx}{zy} - \frac{2x}{w} + \frac{xz}{yp} + \frac{yz}{ww} - \frac{zz}{wp}\right) : \left(\frac{x}{y} - \frac{z}{w}\right);$

41) † $\left(4\frac{1}{3}abbc + 1\frac{1}{6}ab + 3\frac{1}{2}aacc - 12\frac{1}{6}abcc + \frac{1}{3}aabb - 2\frac{11}{36}aabc - 6\frac{1}{4}ac + 14bc - 1\frac{1}{2} + 10bbcc\right) : \left(3 - 1\frac{1}{2}ac + \frac{2}{3}ab + 2bc\right)$*);

*) Dividend und Divisor sind alphabetisch zu ordnen.

42) (aaaa — bbbb) : (a — b); 43) 1 : (1 — a); 44) (1 + a) : (1 — a); 45) c : (a — b); 46) (a — b) : (c — b).

IV. Reduction durch Vereinigung der Quotienten.

47) $\frac{x}{3} + \frac{4y}{5} - c + \frac{d}{6}$; 48) $\frac{x}{3a} + \frac{y}{2b} - \frac{c}{2a} + d$;

49) $-4m + \frac{2n}{5xy} + \frac{v}{3x} - w$; 50) $-3a + \frac{6z}{4ab} + \frac{5y}{2c} - \frac{2}{a}$;

51) † $\frac{4a - 3b}{5} - \frac{6a - 3b + 5c}{2} - \frac{3b - 6a - 5c}{4}$;

52) † $4x - \frac{3x + 2y}{3} - \frac{7y - x}{2} + \frac{5x - 2y}{4} - \frac{3y + 8x}{3}$;

53) $3x + \frac{2x - 3y}{4} - \frac{5x + 2y}{7} - \frac{3x - 2y}{2}$;

54) $2p + \frac{4p - 3x}{3} - \frac{8 - (2 - v)}{5}$;

55) † $\frac{2a - 3b}{2} + \frac{4c - (2a - 3b)}{5} - \frac{6a - (7c - 3b)}{4} + \frac{2a - b}{3}$;

56) † $\frac{3a - 2b}{5} - \left(\frac{4a + 2b - c}{3} + \frac{3a - 5b - 4c}{2}\right)$;

57) † $\frac{2a - b}{3} + \frac{5b - 2c + 3a}{2} - \left(\frac{6a + 3b - c}{4} - \frac{2c + 3a - 5b}{3}\right)$;

58) † $\frac{4x - 8(5z - 3y)}{12} + \frac{3x - 4(2y - 3z)}{5}$;

59) † $\frac{6x - 5(4z + 2y)}{3} - \frac{5x + 3(3y - 2z)}{4}$; 60) † $\frac{a - b}{2ax} + \frac{c}{6xy} - \frac{2d}{9xy}$;

61) † $\frac{2a - 3b}{6ab} - \frac{3a + 5b}{9a} + \frac{2b - 3a}{4bc}$; 62) † $\frac{3x}{a - 2b} - \frac{2x}{2a - b}$;

63) † $\frac{3a + 2b}{3c} - \frac{2a - 3b}{a - c} - \frac{3a + 5b}{5c}$; 64) $\frac{5b + 4}{c - 2} + 3d + \frac{4x + 3f}{5}$;

65) † $\frac{4x}{x + y} - \frac{3y}{2x + 3y} + \frac{3x - 2y}{3x}$; 66) $\frac{a + 3}{4} - (c - 3)(b - 5) + \frac{b}{c - d}$;

67) † $\frac{5a}{12a + 6b} - \frac{7b}{8a - 4b}$; 68) † $\frac{3a}{5ab - 10bb} - \frac{3c + 2}{3ac - 6bc}$;

69) † $\frac{3a - b}{aa + 2ab + bb} - \frac{3a + b}{aa - bb}$; 70) † $\frac{2a + c}{a - b} - \frac{2a - c}{a + b} + \frac{bc - aa}{aa - bb}$.

V. Reduction durch Heben der Brüche.

71) $\frac{14aa - 7ab}{10ac - 5bc}$; 72) $\frac{6ac + 9bc - 5cc}{12adf + 18bdf - 10cdf}$;

73) $\frac{12aab + 16acb - 20abd}{15acd + 20ccd - 25cdd}$; 74) $\frac{18acd + 12aef}{12bcd + 8bef + 6ccd + 4cef}$;

75) $\frac{18aabb - 30abc - 9abd + 15cd}{30cd - 18abd - 35abc + 21aabb}$;

76) $\frac{6xzv + 8xxy + 9yzv + 12xyy}{9zvv + 12vxy - 12zvw - 16xyw}$; 77) $\frac{6pp + 9ps - 2p - 3s}{9ms + 15ns + 10np + 6mp}$;

78) $\frac{bc + ac + ad + bd}{bf + 2bx + af + 2ax}$; 79) $\frac{2xxx + 3xx + x}{xxx - xx - 2x}$; 80) (81) $\frac{ppp - 2pp}{pp - 4p + 4}$.

VI. Vermischte Reductionen.

81) (82) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) : \left(\frac{e}{f} + \frac{g}{h}\right)$; 82) † $\frac{3a}{a - b} + \frac{5b}{bb - ab} - \frac{a + b}{aa - bb}$;

83) † $\frac{3a - b}{2a + b} - \frac{6a + 6b}{aa + 2ab + bb}$; 84) $\frac{xx + 8x + 15}{xx + 7x + 10} - \frac{x - 1}{x + 2}$;

85) $\frac{6mn - 2n - 9m + 3}{4mn - 6n - 6m + 9} - \frac{6mn - 15n - 8m + 20}{9mn - 6n - 12m + 8}$;

86) $\frac{aa - 4a + 3}{aa - 5a + 4} - \frac{3c + 5d}{5ad - 12c - 20d + 3ac}$;

87) $\left\{\left(\frac{2a}{ab + 2b + 3a + 6} + \frac{a}{ab + 2b + a + 2}\right) : \frac{3b + 5}{bb + 4b + 3}\right\} + \frac{a + 4}{a + 2}$;

88) $\left[\frac{15aa + 9ab + 20ac + 12bc}{3abc - 4abd} : \left(\frac{5}{b} + \frac{3}{a}\right)\right] - \frac{bc - ac}{3cb - 3ca - 4db + 4da}$;

89) $\left\{\frac{aa + 6ab + 8bb}{cc + 9cd + 18dd} : \left[\frac{2ac - 3ad}{2cc - 3cd + 12cd - 18dd} + \frac{4bc + 4b}{cc + 6d + c + 6cd}\right]\right\} - \left[\frac{4ah + 12bh - 2ag - 6bg}{4ch - 6dg - 2cg + 12hd} - \frac{b}{c + 3d}\right]$;

90) $\left[\left(6a + \frac{3a - 2b}{4c + 3d}\right) \cdot \left(\frac{2c + e}{5}\right) - \frac{12acc + 6aec - 6aed - 12acd}{5c - 5d}\right] \cdot \left[4 \cdot \left(\frac{8ac + 8ad - bc - bd}{-be - 2bc + 8ae + 16ac}\right) - \frac{d}{2c + e}\right]$.

Auflösungen.

1) $-\frac{5c}{42} - \frac{17d}{21} + \frac{e}{16} + \frac{2f}{27}$; 2) $\frac{19ab}{15} - \frac{11ac}{14} - \frac{19d}{20} - \frac{6ae}{35} + \frac{16a}{15}$;

3) $-\frac{13ab}{14} + \frac{19ac}{15} - \frac{17ae}{12} + \frac{47ce}{42}$;

4) $\frac{3abc}{5} - \frac{2ab}{5} - \frac{25ac}{12} + \frac{3a}{2} - \frac{31b}{35} + \frac{c}{4}$;

5) $\frac{23ab}{12} - \frac{451ac}{210} - \frac{4ad}{33} - \frac{53af}{42}$; 6) $\frac{17ab}{12} + \frac{19ac}{10} + \frac{3a}{4} + \frac{499b}{420} - \frac{13c}{5}$;

7) $\frac{85a}{84} - \frac{5b}{21}$; 8) $6a + 2c$; 9) $-\frac{x}{10} + \frac{2y}{15} - \frac{z}{5}$;

10) $6m - 15n + \frac{13v}{4} + \frac{7w}{2}$; 11) $\frac{76x}{15} - \frac{29y}{6} + \frac{4z}{15}$;

12) $-\frac{k}{4} - \frac{31m}{10} + \frac{87n}{20}$; 13) $\frac{13a}{12} - \frac{5b}{3}$; 14) $-\frac{b}{2} - c$; 15) $\frac{ed}{5}$;

16) $\frac{3xx}{2} - \frac{x}{4} - \frac{17}{3}$; 17) $-xx - \frac{23x}{6} - 4$;

18) $\frac{aa}{3} - \frac{ab}{36} - \frac{ac}{24} - \frac{bb}{6} + \frac{5bc}{24} - \frac{cc}{16}$;

19) $\frac{3cc}{8} - \frac{17cd}{4} + \frac{107cee}{12} + 10dd - \frac{88dee}{3} - 2eeee$;

20) $\frac{2aab}{9} + \frac{5aac}{3} + \frac{29abc}{18} + \frac{abb}{5} + \frac{bbc}{5} - \frac{5acc}{6} - \frac{bcc}{9}$;

21) $\frac{8aaaa}{15} + \frac{73aaab}{15} - \frac{20aa}{9} + 10\,aabb - \frac{91ab}{12} + \frac{5}{6}$;

22) $\frac{36aa}{bb} - \frac{25bb}{cc} + \frac{30bb}{d} - \frac{130bb}{cd} - \frac{9bbcc}{dd} + \frac{78bbc}{dd} - \frac{169bb}{dd}$;

23) $\frac{2aabb}{3ccdd} + \frac{4aa}{45dd} + \frac{7bb}{3dd} - \frac{16aacc}{15bbdd} - \frac{10cc}{9dd} + \frac{5bbcc}{3aadd}$;

24) $-2xxx - \frac{41xx}{3} + \frac{106x}{9} + \frac{40}{3}$; 25) $-\frac{2xx}{5} - \frac{4x}{5} + \frac{3}{5}$;

26) $\frac{3b}{g} - \frac{4df}{3g} + \frac{5c}{3g}$; 27) $-\frac{6c}{g} + \frac{3d}{g} - \frac{2c}{ag}$;

28) $a + b - c$; 29) $2a + 5b - 3c$; 30) $5a + 3b + 4c$;

31) $8x + 4y + 3z + 8v$; 32) $2m + 3n - 4p$; 33) $30g + 12h - 3k$;

34) $3a - 2b + 5c - 4d$; 35) $\frac{ad}{3bc} + \frac{fdd}{6cc} - ad + \frac{7d}{3c}$;

36) $\frac{9aaf}{8bbde} - \frac{3accf}{5dde} - \frac{2cffa}{bdee}$; 37) $\frac{6a}{b} - \frac{5b}{c} + \frac{3bc}{d} - \frac{13b}{d}$;

38) $\frac{3}{2}a - 5b - \frac{1}{3}cc$; 39) $5x - z$; 40) $\frac{x}{z} - \frac{y}{w} + \frac{z}{p}$;

41) $\frac{ab}{2} - \frac{7ac}{3} + 5bc - \frac{1}{2}$; 42) $aaa + aab + abb + bbb$;

43) $1 + a + aa + aaa + aaaa + \ldots\ldots$

44) $1 + 2a + 2aa + 2aaa + 2aaaa + \ldots\ldots$

45) $\frac{c}{a} + \frac{c}{a}\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\frac{bb}{aa} + \frac{c}{a}\frac{bbb}{aaa} + \ldots\ldots$

46) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{(a-c)}{c} + \frac{bb}{cc} \cdot \frac{a-c}{c} + \frac{bbb}{ccc} \cdot \frac{a-c}{c} + \ldots\ldots$

47) $(10x + 24y - 30c + 5d) : 30$; 48) $(2bx + 3ay - 3bc + 6adb) : 6ab$;

49) $(-60mxy + 6n + 5vy - 15wxy) : 15xy$;

50) $(-12aabc + 6zc + 10yba - 8bc) : 4abc$; 51) $(-14a + 3b - 25c) : 20$;

52) $(25x - 68y) : 12$; 53) $(36x - y) : 28$; 54) $(50p - 15x - 18 - 3v) : 15$;

55) $(-14a - 119b + 153c) : 60$; 56) $(-67a + 43b + 70c) : 30$;

57) $(20a - 3b - c) : 12$; 58) $(14x + 6y - 14z) : 15$;

59) $(9x - 67y - 62z) : 12$; 60) $(9ay - 9by + 3ac - 4ad) : 18axy$;

61) $(12ac - 18bc - 12abc - 20bbc + 18ab - 27aa) : 36abc$;

62) $(4ax + bx) : (2aa - 5ab + 2bb)$;

63) $(6aa - 5ab - 36ac + 50bc) : (15ac - 15cc)$;

64) $(25b + 20 + 15cd - 30d + 4cx + 3cf - 8x - 6f) : (5c - 10)$;

65) $(30xxx + 38xxy - 10xyy - 6yyy) : (6xxx + 15xxy + 9xyy)$;

66) $(ac - ad + 4b - 4bcc - 57c + 57d + 12bc + 20cc + 4bcd - 12bd - 20cd) : (4c - 4d)$;

67) $(10a - 21b) : (24a + 12b)$; 68) $(9ac - 15bc - 10b) : (15abc - 30bbc)$;

69) $(-8ab) : (aaa - abb + aab - bbb)$;

70) $(-aa + 4ab + 2ac + bc) : (aa - bb)$; 71) $\frac{7a}{5c}$; 72) $\frac{c}{2df}$; 73) $\frac{4ab}{5cd}$;

74) $\frac{3a}{2b + c}$; 75) $\frac{6ab - 3d}{7ab - 6d}$; 76) $\frac{2x + 3y}{3v - 4w}$; 77) $\frac{3p - 1}{3m + 5n}$; 78) $\frac{c + d}{f + 2x}$;

79) $\frac{2x + 1}{x - 2}$; 80) $\frac{pp}{p - 2}$; 81) $\frac{(ad + bc)\,fh}{(eh + fg)\,bd}$; 82) $\frac{3a - 6}{a - b}$;

83) $\frac{3aa + 2ab - bb - 12a - 6b}{2aa + 3ab + bb}$; 84) $\frac{4}{x + 2}$; 85) $\frac{5mm + 7m - 13}{6mm - 13m + 6}$;

86) 1; 87) 2; 88) $\frac{3\,(a + c)}{3c - 4d}$; 89) 0; 90) $\frac{3a - 2b}{5}$.

Zweites Capitel.

Von einigen Anwendungen des Bisherigen auf das Zifferrechnen.

A. Von den Zahlensystemen.

§. 54. Erklärung.

Zur schriftlichen Darstellung der Zahlen hat man neun Ziffern für die ersten neun Zahlen und außerdem die Null.

Bezeichnet man die auf Neun folgende Zahl Zehn durch z, so lassen sich die aufeinanderfolgenden Zahlen der Zahlenreihe durch nachstehende Zeichen darstellen:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
z,	$(z+1)$,	$(z+2)$,	$(z+3)$,	$(z+4)$,	. . .	. . .	. . .	. . .	$(z+9)$,
2z,	$(2z+1)$,	$(2z+2)$,	$(2z+3)$,	$(2z+4)$,	. . .	. . .	. . .	. . .	$(2z+9)$,
:	:	:	:	:					:
:	:	:	:	:					:
9z,	$(9z+1)$,	$(9z+2)$,	$(9z+3)$,	$(9z+4)$,	. . .	. . .	. . .	. . .	$(9z+9)$,
zz,	$(zz+1)$,	$(zz+2)$,	$(zz+3)$,	$(zz+4)$,	. . .	. . .	. . .	. . .	$(zz+9)$,

u. s. w.

Die Reihe dieser Zahlzeichen nennt man das *zehntheilige* (*dekadische*) Zahlensystem. Die Zahl z, nach welcher das System geordnet ist, heißt die *Grundzahl* desselben. Die Zahlen 1 bis 9 nennt man *Einer*, die Zahlen z, 2z bis 9z *Zehner*, die Zahlen zz, 2zz bis 9zz *Hunderte*; alsdann folgen *Tausende*, *Zehntausende*, *Hunderttausende* u. s. w.

§. 55. Zusatz.

Jede ganze Zahl läßt sich darstellen als eine Summe von der Form:

$$a + b \cdot z + c \cdot z^2 + d \cdot z^3 + e \cdot z^4 + \ldots{}^{*)},$$

wo a, b, c, d, e u. s. w. eine der neun Ziffern oder Null bedeuten. Hat man nämlich eine beliebige Anzahl von Einheiten, welche man in dieser Art darstellen will, so faßt man je zehn Einheiten zu einem Zehner zusammen, wobei mehrere Einer als Rest bleiben können, faßt ferner je zehn Zehner zu einem Hundert zusammen, wobei wiederum mehrere Zehner als Rest bleiben können, und fährt in dieser Art fort bis zum Schluß.

---

*) Vergleiche §. 34, Note

§. 56. Erklärung.

Für die Summe $a + b \,.\, z + c \,.\, z^2 + d \,.\, z^3 + e \,.\, z^4 + \ldots$ hat man die Schreibform

$$\ldots\ldots e\ d\ c\ b\ a.$$

Es bezeichnet hierbei die letzte Ziffer (a) auf der rechten Seite die Einer, die vorangehende (b) die Zehner, wiederum die vorangehende (c) die Hunderte, u. s. w. Daher ist z. B.

$$63542 = 2 + 4z + 5z^2 + 3z^3 + 6z^4,$$

umgekehrt $5 + 8z + 4z^2 = 485$.

Fehlt irgend ein Glied, so füllt man seine Stelle durch eine Null aus. So ist z. B.

$$5 + 4z^2 = 5 + 0 \,.\, z + 4z^2 = 405,$$
$$z = 0 + 1 \,.\, z = 10.$$

§. 57. Zusatz.

Hätte man statt 10 Ziffern (die Null eingerechnet) bloß 4, oder 5, oder hingegen 11, 12, 13 u. s. w., so könnte man jede Zahl ebenso leicht nach einem viertheiligen, elftheiligen u. s. w. System schreiben. Soll z. B. die nach dem zehntheiligen System geschriebene Zahl 469 nach dem viertheiligen geschrieben werden, d. h. als eine Summe von der Form

$$a + b \,.\, 4 + c \,.\, 4^2 + d \,.\, 4^3 + e \,.\, 4^4 + \ldots.$$

dargestellt werden, so verfährt man folgendermaßen. Es ist

$$469 = 117 \,.\, 4 + 1, \quad \text{ferner}$$
$$117 \,.\, 4 = 29 \,.\, 4^2 + 1 \,.\, 4, \quad \text{ferner}$$
$$29 \,.\, 4^2 = 7 \,.\, 4^3 + 1 \,.\, 4^2, \quad \text{ferner}$$
$$7 \,.\, 4^3 = 1 \,.\, 4^4 + 3 \,.\, 4^3. \quad \text{Folglich ist}$$

$469 = 1 + 1 \,.\, 4 + 1 \,.\, 4^2 + 3 \,.\, 4^3 + 1 \,.\, 4^4 = 13111$ (viertheiliges System).

Am bequemsten ist diese Berechnung in folgender Form auszuführen:

4	469	117	29	7	1
	468	116	28	4	
	1	1	1	3	

Soll umgekehrt die nach dem viertheiligen System geschriebene Zahl 13111 nach dem zehntheiligen geschrieben werden, so ist die Summe

$$1 \,.\, 4^4 + 3 \,.\, 4^3 + 1 \,.\, 4^2 + 1 \,.\, 4 + 1$$

nach dem zehntheiligen System zu berechnen.

§. 58. Zusatz.

Die in vorigem Capitel aufgestellten Sätze bilden auch für das Ziffer- rechnen die Grundlage. Wenn bei letzterem einige Abweichungen stattzufin- den scheinen, so rühren sie im Allgemeinen daher, daß man statt der Verbin- dung zweier Zahlen wirklich eine dritte setzen kann. Die Art und Weise, wie beim Zifferrechnen verfahren wird, kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Aufgaben.

1) Die Zahl 342 (10theil. System) nach dem 5theil. zu schreiben.
2) „ „ 647 „ „ „ „ 7 „ „ „
3) „ „ 489 „ „ „ „ 2 „ „ „
4) „ „ 38 „ „ „ „ 3 „ „ „
5) „ „ 6937 „ „ „ „ 12 „ „ „
6) „ „ 638 „ „ „ „ 5 „ „ „
7) „ „ 3220 6 „ „ „ „ 10 „ „ „
8) „ „ 31003 4 „ „ „ „ 10 „ „ „
9) „ „ 1233 7 „ „ „ „ 10 „ „ „
10) Die Summe 632 + 453 (7theil. System) zu berechnen.
11) Die Summe 231 + 103 + 210 + 103 (4theil. System) zu berechnen.
12) Das Produkt 123 . 342 (5theil. System) zu berechnen.
13) Das Produkt 321 . 122 (4theil. System) zu berechnen.

Auflösungen.

1) 2332; 2) 1613; 3) 111101001; 4) 1102; 5) 4021; 6) 5023; 7) 732; 8) 835; 9) 465; 10) 1415; 11) 1313; 12) 104221; 13) 113022.

B. Von der Theilbarkeit der Zahlen.

§. 59. Erklärung.

Eine Zahl ist durch eine andere theilbar oder ist ein Vielfaches derselben, wenn sie bei der Division durch letztere einen ganzen Quotienten giebt. So ist 12 durch 3 theilbar, weil $12 : 3 = 4$ ist. Eine Zahl, die bloß durch sich selbst und durch 1 theilbar ist, nennt man eine Primzahl.

§. 60. Erklärung.

Jede Zahl, die nicht eine Primzahl ist, läßt sich als ein Produkt ver- schiedener Primzahlen darstellen. So ist z. B. $36 = 2 . 2 . 3 . 3$. Das Aufsuchen dieser Primzahlen nennt man das Zerlegen einer Zahl in ihre Faktoren. Für das Auffinden der Faktoren hat man verschiedene Regeln,

die sich sämmtlich auf den Satz stützen, daß eine Summe durch m theilbar ist, wenn sich jeder ihrer Summanden durch m theilen läßt.

§. 61. Lehrsätze.*)

1) Eine Zahl ist durch 2 theilbar, wenn ihre Einer durch 2 theilbar sind.

Beweis. Da alle Zehner durch 2 theilbar sind, so hängt die Theilbarkeit der Zahl bloß von den Einern ab.

2) Eine Zahl ist durch 4 theilbar, wenn ihre Einer und Zehner zusammen durch 4 theilbar sind.

Beweis. Da alle Hunderte durch 4 theilbar sind, so hängt die Theilbarkeit der Zahl von den Zehnern und Einern ab.

3) Eine Zahl ist durch 8 theilbar, wenn ihre Einer, Zehner und Hunderte zusammen durch 8 theilbar sind.

Beweis. Er folgt daraus, daß die Tausende durch 8 theilbar sind.

4) Eine Zahl ist durch 10 theilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0, ferner durch 5, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.

Beweis. Er folgt daraus, daß die Zehner durch 10 und 5 theilbar sind.

5) Eine Zahl ist durch 3, oder durch 9 theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern, die Quersumme, durch 3, oder durch 9 theilbar ist.

Beweis. Es ist die Zahl $a + b.10 + c.100 + d.1000 + \ldots\ldots$

$$= a + b(9 + 1) + c(99 + 1) + d(999 + 1) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= (a + b + c + d + \ldots) + (9b + 99c + 999d + \ldots).$$

Der zweite Summand ist jedesmal durch 3 und durch 9 theilbar, und die Theilbarkeit der Zahl hängt also vom ersten Summanden, d. h. von der Quersumme ab.

6) Eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Summe der ersten, dritten, fünften u. s. w. Ziffer so viel beträgt, wie die Summe der zweiten, vierten u. s. w., oder wenn die Differenz beider Summen durch 11 theilbar ist.

Beweis. Es ist die Zahl

$$a + b.10 + c.100 + d.1000 + e.10000 + f.100000 + \ldots$$
$$= a + b(11 - 1) + c(99 + 1) + d(1001 - 1) + e(9999 + 1) + f(100001 - 1) + \ldots$$
$$= (a - b + c - d + e - \ldots) + (11b + 99c + 1001d + 9999e + \ldots).$$

Der zweite Summand ist stets durch 11 theilbar, und die Theilbarkeit der Zahl hängt also davon ab, daß $(a - b + c - d + e - \ldots)$ oder

*) Aehnliche Sätze lassen sich für jedes andere Zahlensystem aufstellen.

$(a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$ entweder gleich Null, oder durch 11 theilbar ist.

7) Eine Zahl ist durch eine aus mehreren Faktoren (2, 3, 5...) zusammengesetzte Zahl theilbar, wenn sie sich durch alle diese Faktoren *nach einander* theilen läßt.

§. 62. Erklärung.

Sind zwei Zahlen a und b durch eine dritte c theilbar, so nennt man c den *gemeinschaftlichen Theiler* von a und b. Ist die Zahl 1 der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b, so nennt man a und b *relative Primzahlen*.

§. 63. Aufgabe.

Den *größten* gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden.

Auflösung. Man dividirt mit der kleinern Zahl a in die größere b, mit dem Reste c in den vorhergehenden Divisor a, mit dem nun bleibenden Reste d in den vorhergehenden Divisor c, und setzt dies Verfahren fort, bis die Division aufgeht. Der zuletzt gebrauchte Divisor ist alsdann der größte gemeinschaftliche Theiler.

Man rechnet dabei nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{l}
a \mid b \mid x \\
\quad ax \\
\hline
\quad c \mid a \mid y \\
\qquad cy \\
\hline
\qquad d \mid c \mid z \\
\qquad\quad dz \\
\hline
\end{array}$$

Ist hierbei $c - dz = 0$, so ist d der größte gemeinschaftliche Theiler.

Beweis. Da c und d durch d theilbar sind, so ist auch $cy + d$ oder a durch d theilbar, und da c und a durch d theilbar sind, so ist es auch $c + ax$ oder b. — Wollte man annehmen, daß es neben d noch eine größere Zahl e gäbe, durch welche a und b theilbar wären, so müßte, da a und b sich durch e theilen ließen, auch $b - ax$ oder c durch e theilbar sein; wären nun c und a durch e theilbar, so wäre es auch $a - cy$ oder d. Dies ist aber nicht möglich.

Beispiel.

Berechnung des größten gemeinschaftlichen Theilers für die Zahlen 9107 und 14311.

```
9107 | 14311 | 1
        9107
        5204 | 9107 | 1
               5204 |
               3903 | 5204 | 1
                      3903
                      1301 | 3903 | 3
                             3903
```

Es ist also 1301 der größte gemeinschaftliche Theiler, und zwar ist

$$9107 = 7 \,.\, 1301,\ 14311 = 11 \,.\, 1301,$$

daher $\dfrac{9107}{14311} = \dfrac{7 \,.\, 1301}{11 \,.\, 1301} = \dfrac{7}{11}.$

§. 64. Erklärung.

Ist eine Zahl a theilbar durch b, c, d, e ..., so nennt man sie ein **gemeinschaftliches Vielfaches** von b, c, d, e. Ist a ein gemeinschaftliches Vielfaches mehrerer Zahlen, so ist auch 2a ein solches, ebenso 3a u. s. w. Die kleinste Zahl unter verschiedenen Vielfachen nennt man das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache.**

§. 65. Aufgabe.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden.

Auflösung. Es ist dies die Aufgabe, für mehrere Brüche den Generalnenner zu finden. Sind die Zahlen unter einander Primzahlen, so ist ihr Produkt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Haben aber einzelne derselben einen gemeinschaftlichen Faktor, so wird derselbe nur **einmal** in Rechnung gebracht. Da z. B. $6 = 2 \,.\, 3$, ferner $8 = 2 \,.\, 4$ ist, so ist $2 \,.\, 3 \,.\, 4$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 6 und 8, und dies ist theilbar durch $2 \,.\, 3$, wie durch $2 \,.\, 4$. (§. 49).

Aufgaben.

Die nachstehenden Brüche zu kürzen (§. 63).

1) $\frac{9228}{11535}$; 2) $\frac{13790}{15169}$; 3) $\frac{30254}{38898}$; 4) $\frac{5481}{14616}$; 5) $\frac{13302}{24387}$; 6) $\frac{51864}{56186}$;

7) $\frac{13956}{17445}$; 8) $\frac{550494}{1022346}$; 9) $\frac{11601}{65739}$; 10) $\frac{26971}{46236}$; 11) $\frac{8276}{45518}$;

12) $\frac{97496}{100978}$; 13) $\frac{90552}{94864}$.

Auflösungen.

1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{10}{11}$; 3) $\frac{7}{9}$; 4) $\frac{3}{8}$; 5) $\frac{6}{11}$; 6) $\frac{12}{13}$; 7) $\frac{4}{5}$; 8) $\frac{7}{13}$;

9) $\frac{3}{17}$; 10) $\frac{7}{12}$; 11) $\frac{2}{11}$; 12) $\frac{28}{29}$; 13) $\frac{21}{22}$.

C. Von den Decimalbrüchen.

§. 66. Erklärung.

Brüche, deren Nenner beliebige Potenzen von 10 sind (§. 34, Note), wie z. B. $\frac{6}{10}, \frac{28}{100}, \frac{7}{1000}$ u. s. w., heißen Decimalbrüche.

Jeder Decimalbruch läßt sich in eine Summe von Brüchen mit den aufeinanderfolgenden Nennern 1, 10, 100, 1000 u. s. w. zerlegen, wobei der Bruch, dessen Nenner 1 ist, die Anzahl der Ganzen bezeichnet. So ist z. B.

$$6\frac{7632}{10000} = \frac{6}{1} + \frac{7}{10} + \frac{6}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{10000};$$

$$\frac{6403}{100000} = \frac{0}{1} + \frac{0}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000};$$

$$\frac{80024}{1000} = \frac{80}{1} + \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000}.$$

Die Decimalbrüche bilden also eine Fortsetzung des dekadischen Zahlensystems und sind sogenannte systematische Brüche. Zu ihrer schriftlichen Darstellung benutzt man daher dasselbe Gesetz, welches für die ganzen Zahlen gilt (§. 56), nach welchem nämlich jede Ziffer in der spätern Stelle einen zehnmal geringeren Werth hat, als in der vorangehenden. Man läßt die Nenner weg, schreibt erst die Ganzen, dann die Zehntel, Hunderttel u. s. w. in ihrer Aufeinanderfolge, ergänzt die etwa fehlenden Stellen jedesmal durch eine Null und trennt die Ganzen von den Zehnteln durch ein Komma. Die oben angeführten Brüche bezeichnet man also durch die Schreibform

6,7632; 0,06403; 80,024.

Soll umgekehrt ein derartiger Decimalbruch in Form eines gewöhnlichen Bruches geschrieben werden, so bilden die Ziffern des geschriebenen Bruches den Zähler, und der Nenner erhält so viel Nullen, als der Bruch Decimalstellen, d. h. Stellen nach dem Komma hat. Sind Ganze vorhanden, so kann man dem Resultate die Form eines unächten Bruches, oder einer gemischten Zahl geben. Es ist also z. B.

$$0{,}34 = \frac{34}{100};\ 0{,}025 = \frac{25}{1000};\ 6{,}023 = 6\frac{23}{1000} = \frac{6023}{1000}.$$

Anm. Ein Decimalbruch ändert nach dem Gesagten seinen Werth nicht, wenn man ihm beliebig viel Nullen anhängt.

§. 67. Aufgabe.

Einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandelt den Zähler in Zehntel und dividirt durch den Nenner, verwandelt dann den Rest in Hunderttel und dividirt wieder durch den Nenner und fährt in entsprechender Art fort. So ist z. B.

$$\frac{5}{8} = \frac{50}{10} : 8 = \frac{6}{10} + \left(\frac{2}{10} : 8\right);$$ ferner ist

$$\frac{2}{10} : 8 = \frac{20}{100} : 8 = \frac{2}{100} + \left(\frac{4}{100} : 8\right);$$ ferner ist

$$\frac{4}{100} : 8 = \frac{40}{1000} : 8 = \frac{5}{1000}.$$

Es ist also $\frac{5}{8} = \frac{0}{1} + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 0{,}625.$

Die Berechnung führt man gewöhnlich in folgender Form aus:

```
8 | 50 | 0,625
    48
    --
     20
     16
     --
      40
      40
      --
```

Anm. 1. Die Division geht nicht immer ohne Rest auf. Es ist z. B. $\frac{5}{7} = 0{,}7142857142 85\ldots$

Anm. 2. Die Verwandlung eines Quotienten in einen systematischen Bruch läßt sich in ähnlicher Weise für jedes beliebige Zahlensystem ausführen. (§. 57).

§. 68. Erklärung.

Ein Decimalbruch heißt rational, wenn die Anzahl der Stellen begränzt, er heißt irrational, wenn sie unbegränzt ist.

Wiederholen sich bei einem irrationalen Decimalbruche dieselben Ziffern vom Komma an in derselben Ordnung, wie z. B. in dem Bruche 0,272727..., so nennt man ihn vollkommen periodisch, und die regelmäßig wiederkehrende Ziffernreihe (in dem angeführten Beispiele 27) heißt die Periode

des Bruches'; beginnt die Periode nicht mit der ersten Stelle nach dem Komma, wie z. B. in dem Bruche 0,86565...., so heißt derselbe unvollkommen periodisch. Die übrigen irrationalen Decimalbrüche heißen unperiodisch.

Anm. Hat man mit irrationalen Decimalbrüchen zu rechnen, so muß man dieselben bei irgend einer Stelle abbrechen lassen, und das Resultat kann daher nicht genau richtig sein. Da indessen sämmtliche Stellen, die man wegläßt, zusammen noch nicht den Werth von einer Einheit der zunächst vorangehenden Stelle haben, wie z. B 0,3142896 ... kleiner ist als 0,3143, so wird der Fehler um so geringer, je größer die Anzahl der benutzten Decimalstellen ist, und bei jeder Aufgabe tritt endlich ein Punkt ein, wo der Fehler so unbedeutend wird, daß man ihn vernachlässigen kann.

§. 69. Zusatz.

Jeder gewöhnliche Bruch, der in einen Decimalbruch verwandelt wird, muß entweder einen rationalen, oder einen periodischen Decimalbruch liefern. Sobald man nämlich bei der Division (§. 67) einen Rest erhält, den man schon einmal erhalten hatte, so müssen sich auch dieselben Quotienten in derselben Reihenfolge wiederholen. Ist z. B. 17 der Nenner des gegebenen Bruches, so kann man bei der Division die verschiedenen Reste 1, 2, 3 ... 16 erhalten; spätestens der 17te Rest muß daher ein solcher sein, den man schon einmal erhalten hatte; es muß alsdann die Periode eintreten, und diese kann höchstens 16 Stellen haben.

§. 70. Aufgabe.

Zwei oder mehr Decimalbrüche zu addiren.

Auflösung. Man schreibt Zehntel unter Zehntel, Hunderttel unter Hunderttel u. s. w., indem man die Kommata genau untereinandersetzt, und addirt dann wie gewöhnlich. Zehn Zehntel geben ein Ganzes u. s. w.

Beispiel. Berechnung der Summe

$$(6{,}34 + 0{,}2384 + 3{,}026 + 5{,}82).$$

$$\begin{array}{lr} & 6{,}34 \\ & 0{,}2384 \\ & 3{,}026 \\ & 5{,}82 \\ \hline \text{Summe:} & 15{,}4244. \end{array}$$

Anm. Von irrationalen Decimalbrüchen nimmt man so viel Stellen, als die Genauigkeit der Rechnung verlangt.

§. 71. Aufgabe.

Einen Decimalbruch von einem andern zu subtrahiren.

Auflösung. Man schreibt beide Brüche in derselben Art untereinander,

wie beim Addiren, und subtrahirt dieselben wie ganze Zahlen. Hat der Minuend weniger Decimalstellen, als der Subtrahend, so denkt man sich die fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt.

Beispiele. Berechnung der Differenzen

(6,241 — 3,246), (3,25 — 2,1378), (3,5 — 6,8).

	6,241	3,25	3,5
	3,246	2,1378	6,8
Differenz:	2,995	1,1122	— 3,3.

§. 72. Aufgabe.

Einen Decimalbruch mit 10, 100, 1000 u. s. w. zu multipliciren, oder durch diese Zahlen zu dividiren.

Auflösung. Man rückt im ersten Falle das Komma um 1, 2, 3 ... Stellen nach rechts, im andern nach links. Jede Stelle erhält dadurch einen 10 oder 100mal u. s. w. größeren oder kleineren Werth.

So ist z. B.:

$$6{,}5 \;.\; 100 = 650;$$
$$0{,}023 \;.\; 10 = 0{,}23;$$
$$8{,}12 \;:\; 10 = 0{,}812;$$
$$0{,}31 \;:\; 100 = 0{,}0031.$$

§. 73. Aufgabe.

Zwei oder mehr rationale Decimalbrüche mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Man denkt sich die gegebenen Brüche als gewöhnliche (ächte oder unächte) Brüche geschrieben (§. 66), multiplicirt dann sämmtliche Zähler mit einander und dividirt das Produkt derselben durch das Produkt der Nenner, indem man durch das Komma so viel Stellen abschneidet, als die Nenner zusammen Nullen haben. So ist z. B.

$$2{,}134 \;.\; 0{,}231 = (2134 \;.\; 231) : (1000 \;.\; 1000) =$$
$$492954 : 1000000 = 0{,}492954.$$

Bei der Berechnung bedient man sich einer der beiden nachstehenden Formen, die sich nur in der äußern Anordnung unterscheiden.

```
  2,134          2,134
  0,231          0,231
  -----          -----
   2134          4268
  6402            6402
 4268              2134
 --------       --------
 0,492954       0,492954
```

§. 74. Zusatz.

Sind die zu multiplicirenden Decimalbrüche irrational, so können die letzten Stellen des Resultates nicht richtig sein, wenn man das in vorigem §. angegebene Verfahren anwendet. Aus diesem Grunde bedient man sich gewöhnlich eines kürzeren Verfahrens, bei welchem die (unrichtigen) letzten Stellen des Resultates nicht berechnet zu werden brauchen. Die Art und Weise dieser verkürzten Multiplication ist leicht aus der nachstehenden Berechnung des Produkts (0,6842...) . (0,2573...) zu erkennen. Die links stehende Rechnung, deren äußere Anordnung mit der zweiten Rechnungsform in §. 73 übereinstimmt, soll nur zur Erklärung der rechts stehenden verkürzten Form des Multiplicirens dienen. Durch die Punkte sind nämlich die Zahlen bezeichnet, die man erhalten haben würde, wenn man von beiden Brüchen eine größere Stellenanzahl genommen hätte; man sieht folglich, welche Stellen des Resultates nothwendig falsch sein müssen und deshalb nicht erst berechnet zu werden brauchen.

0,6842...	0,6842..
0,2573...	0,2573..
13684...	13684
34210...	3421
47894...	478
20526...	20
....	0,17603
0,17604466...	

Man multiplicirt zuerst 6842 mit 2; dann multiplicirt man 6842 mit 5, schreibt aber die letzte Stelle (0) des Resultates nicht hin und rückt auch nicht nach rechts aus; dann multiplicirt man 684 mit 7, schreibt wiederum die letzte Stelle (8) des Resultates nicht hin und rückt nicht aus, und in dieser Weise fährt man fort bis zum Schluß. Von dem Resultate 17603 ist die letzte Stelle 3 auf jeden Fall zu klein; die vorangehende Stelle 0 ist also ebenfalls nicht ganz sicher.

Zur Bestimmung des Komma schneidet man nicht 8 Stellen ab, sondern nur 5, weil 3mal nicht nach rechts ausgerückt worden ist.

§. 75. Aufgabe.

Einen rationalen Decimalbruch durch einen andern zu dividiren.

Auflösung. Man giebt beiden Brüchen gleiche Nenner, indem man demjenigen, der die wenigsten Decimalstellen hat, so viel Nullen anhängt, bis beide Brüche gleichviel Stellen haben. Denkt man sich alsdann beide Decimalbrüche als gewöhnliche (ächte oder unächte) Brüche geschrieben, so

kann man die gleichen Nenner gegeneinander streichen und hat folglich nur noch den einen Zähler durch den andern zu dividiren. Es ist daher z. B.

$$6{,}234 : 5{,}64897 = 6{,}23400 : 5{,}64897 = \frac{623400}{564897};$$

$$0{,}0024 : 8{,}6 = 0{,}0024 : 8{,}6000 = \frac{24}{86000}.$$

Die gewöhnlichen Brüche, die man hierbei erhalten hat, verwandelt man schließlich noch in Decimalbrüche (§. 67) und erhält dann die Resultate:

$$\frac{623400}{564897} = 1{,}103\ldots; \quad \frac{24}{86000} = 0{,}000027\ldots.$$

§. 76. Zusatz.

Sind die beiden Brüche irrational, so kann das Resultat, wie beim Multipliciren, nur in den ersten Stellen richtig sein. Um diese Stellen schneller zu erhalten, hängt man bei der Division nicht dem Dividenden Nullen an, sondern streicht die letzten Stellen des Divisors eine nach der andern. Hat man hierbei eine Stelle gestrichen, die größer als 5 ist, so vergrößert man nach dem Streichen die vorangehende Stelle um 1. Die Art und Weise dieser verkürzten Division ist leicht aus der nachstehenden Berechnung des Quotienten (6,214124 ...) : (2,689421 ...) zu erkennen.

```
2689421 | 6214124 | 2,31058...
          5378842
          -------
 268942 |  835282
           806826
           ------
  26894 |   28456
    (9)     26894
            -----
 268(9)|     1562
             1345
             ----
     27       217
              216
              ---
```

§. 77. Aufgaben.

I. Einen periodischen Decimalbruch, z. B. 0,646464... in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Bezeichnet man 0,646464 . . . durch x und multiplicirt den Bruch so oft hintereinander mit 10, bis die erste Periode auf der linken Seite des Komma steht, hier also mit 100, so erhält man:

$$x = 0{,}6464\ldots$$
$$100x = 64{,}6464\ldots$$

Subtrahirt man die obere Gleichung von der unteren, so ergiebt sich:

$$99x = 64, \text{ daher}$$

$$x = \frac{64}{99}.$$

II. Einen unvollkommen periodischen Decimalbruch, z. B. 0,236969... in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Multiplicirt man 0,236969... = x zuerst so oft hintereinander mit 10, bis alle nicht zur Periode gehörenden Stellen auf der linken Seite des Komma stehen, und dann ein zweites Mal so lange, bis auch die erste Periode an dieser Stelle steht, so erhält man:

$$100x = 23,6969\ldots$$

$$10000x = 2369,6969\ldots$$

Folglich ist $9900x = 2346$, daher

$$x = \frac{2346}{9900} = \frac{391}{1650}.$$

Aufgaben.

I. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche.

1) $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{3}{40}$; 3) $\frac{15}{1280}$; 4) $\frac{11}{16}$; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $\frac{4}{11}$; 7) $\frac{4}{7}$; 8) $\frac{4}{35}$;

9) $\frac{7}{12}$; 10) $\frac{8}{13}$; 11) $\frac{11}{15}$; 12) $\frac{5}{44}$; 13) $\frac{35}{74}$; 14) $\frac{29}{37}$; 15) $\frac{1}{223}$; 16) $\frac{3}{713}$;

17) $\frac{5}{833}$; 18) $\frac{6}{102}$; 19) $\frac{9}{3547}$; 20) $\frac{8}{1697}$; 21) $\frac{7}{29}$; 22) $\frac{7}{26}$; 23) $\frac{6}{17}$;

24) $\frac{5}{38}$.

II. Addition und Subtraction.

25) $6,00031 + 2,8347 + 9,6314 + 0,0082$;
26) $3,5 + 0,002 + 3,1847 + 4,9$;
27) $0,001 + 4,2865 + 3,167 + 2,00031$;
28) $2,346 + 0,678 + 1,007 + 0,857$;
29) $5,634 + 5,007956 + 3,90058$;
30) $4,2034 + 8,176 + 0,002 + 1,3465 + 8,2314 + 9,3654$;
31) $2,17 + 5,31 + 0,3281 + 3,0031 + 2,25$;
32) $12,300497 + 0,003 + 4,186732$;
33) $4,3012 + 3.00267 + 2,1314 + 0,002 + 0,03 + 6,0004$;
34) $3,1457 - 2,831$; 35) $2,18 - 1,243$; 36) $11,246 - 3,1573$;

37) 2,1 — 0,00002; 38) 3,147 — 2,16; 39) 12,2145 — 8,39785;
40) † 2,03 — 5,021 + 8,4 — 0,002 — 1,368;
41) † 1,4 + 0,002 — 3,2 — 0,0074 + 8;
42) † — 2,3 — 1,689 + 5,72 + 0,001 — 0,0008;
43) † 1,5 — (8,8 — 7,654) — (2,1 — 7,694);
44) † 0,5 + (0,7 — 4,08) — (0,3 — 6,59);
45) † 9,1 — (6,2 + 1,54) — (8,2 — 9,76) + 5,2;
46) † 1,4 — 2,31 — (8,6 + 3,14) + (2,1 — 7,8).

III. Multiplication.

47) 0,97 . 4,43;
48) 0,131 . 0,347;
49) 0,00353 . 1,49;
50) 0,8747 . 700;
51) 0,0043 . 0,043 . 1100;
52) 0,00107 . 199;
53) 0,0007 . 2999;
54) 0,13 . 1,09 . 0,013;
55) 0,07 . 2,3 . 1,13;
56) 1,1 . 2,3 . 0,241;
57) 1,09 . 1,73;
58) 0,13 . 0,67 . 0,071;
59) 2,3 . 0,29 . 0,031;
60) 0,109 . 0,0499;
61) 0,59 . 0,0031 . 1300;
62) 2,9 . 0,13 . 0,7 . 0,07;
63) 1,27 . 0,11 . 0,43;
64) 0,0061 . 0,00349;
65) 0,00211 . 0,0281;
66) 0,029 . 0,02027;
67) † (2,2 + 1,4) . 2,1 + (6,07 — 5,8) . 0,12;
68) † (3,1 — 0,2) (1,2 — 0,5) — (3,2 + 1,89) (6,4 — 5,8);
69) † 2,1 — (0,3 + 2,1) : 5,5 + (6,4 — 5,6) (4,1 — 3,5);
70) † 3,4 — (8,3 + 0,8) (1,3 — 0,8) + 2,6 . 3,5 — 0,8 . (3,1 — 2,4).

Multiplication irrationaler Decimalbrüche.

71) (0,347892 . . . .) . (3,257318 . . .);
72) (0,032865 . . . .) . (0,027138 . . .);
73) (0,070526 . . . .) . (0,0020865 . .);
74) (2,1004635 . . .) . (3,145367 . . .);
75) (3,403582 . .) . (5,126357 . . .);
76) (2,18653 . . .) . (7,135786 . . .);
77) (3,12934 . . .) . (2,124687 . . .).

IV. Division.

78) 1385,3 : 700;
79) 141,83 : 1300;
80) 33,361 : 730;
81) 3587,3 : 2900;
82) 3589,1 : 1900;
83) † 32,34462 : 2,31;
84) 51,953 : 47,23;
85) 0,52537 : 0,0491;
86) 2,0687 : 1,51;
87) 3,0587 : 4,19;
88) 0,00203 : 0,007;
89) 0,706 : 59,07;
90) 1,9 : 0,1365;
91) 0,013 : 0,0022;
92) 0,3 : 0,035;
93) 0,15 : 1,7;
94) 3,163 : 0,03415;
95) 0,02478 : 0,0013;
96) 0,078 : 3,14;
97) 0,00004 : 0,00203;
98) 0,0023 : 33,14.

Division irrationaler Decimalbrüche.

99) (6,839423 . . . .) : (2,213528 . . . .);
100) (3,4271 . . . . . .) : (0,027385 . . . .);

Subtrahirt man die obere Gleichung von der unteren, so ergiebt sich:

$$99x = 64, \text{ daher}$$

$$x = \frac{64}{99}.$$

II. Einen unvollkommen periodischen Decimalbruch, z. B. 0,236969... in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Multiplicirt man 0,236969... = x zuerst so oft hintereinander mit 10, bis alle nicht zur Periode gehörenden Stellen auf der linken Seite des Komma stehen, und dann ein zweites Mal so lange, bis auch die erste Periode an dieser Stelle steht, so erhält man:

$$100x = 23,6969\ldots$$

$$10000x = 2369,6969\ldots$$

Folglich ist $9900x = 2346$, daher

$$x = \frac{2346}{9900} = \frac{391}{1650}.$$

Aufgaben.

I. Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche.

1) $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{3}{40}$; 3) $\frac{15}{1280}$; 4) $\frac{11}{16}$; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $\frac{4}{11}$; 7) $\frac{4}{7}$; 8) $\frac{4}{35}$;

9) $\frac{7}{12}$; 10) $\frac{8}{13}$; 11) $\frac{11}{15}$; 12) $\frac{5}{44}$; 13) $\frac{35}{74}$; 14) $\frac{29}{37}$; 15) $\frac{1}{223}$; 16) $\frac{3}{713}$;

17) $\frac{5}{833}$; 18) $\frac{6}{102}$; 19) $\frac{9}{3547}$; 20) $\frac{8}{1697}$; 21) $\frac{7}{29}$; 22) $\frac{7}{26}$; 23) $\frac{6}{17}$;

24) $\frac{5}{38}$.

II. Addition und Subtraction.

25) 6,00031 + 2,8347 + 9,6314 + 0,0082;
26) 3,5 + 0,002 + 3,1847 + 4,9;
27) 0,001 + 4,2865 + 3,167 + 2,00031;
28) 2,346 + 0,678 + 1,007 + 0,857;
29) 5,634 + 5,007956 + 3,90058;
30) 4,2034 + 8,176 + 0,002 + 1,3465 + 8,2314 + 9,3654;
31) 2,17 + 5,31 + 0,3281 + 3,0031 + 2,25;
32) 12,300497 + 0,003 + 4,186732;
33) 4,3012 + 3.00267 + 2,1314 + 0,002 + 0,03 + 6,0004;
34) 3,1457 — 2,831; 35) 2,18 — 1,243; 36) 11,246 — 3,1573;

37) 2,1 — 0,00002; 38) 3,147 — 2,16; 39) 12,2145 — 8,39785;
40) † 2,03 — 5,021 + 8,4 — 0,002 — 1,368;
41) † 1,4 + 0,002 — 3,2 — 0,0074 + 8;
42) † — 2,3 — 1,689 + 5,72 + 0,001 — 0,0008;
43) † 1,5 — (8,8 — 7,654) — (2,1 — 7,694);
44) † 0,5 + (0,7 — 4,08) — (0,3 — 6,59);
45) † 9,1 — (6,2 + 1,54) — (8,2 — 9,76) + 5,2;
46) † 1,4 — 2,31 — (8,6 + 3,14) + (2,1 — 7,8).

III. Multiplication.

47) 0,97 . 4,43;
48) 0,131 . 0,347;
49) 0,00353 . 1,49;
50) 0,8747 . 700;
51) 0,0043 . 0,043 . 1100;
52) 0,00107 . 199;
53) 0,0007 . 2999;
54) 0,13 . 1,09 . 0,013;
55) 0,07 . 2,3 . 1,13;
56) 1,1 . 2,3 . 0,241;
57) 1,09 . 1,73;
58) 0,13 . 0,67 . 0,071;
59) 2,3 . 0,29 . 0,031;
60) 0,109 . 0,0499;
61) 0,59 . 0,0031 . 1300;
62) 2,9 . 0,13 . 0,7 . 0,07;
63) 1,27 . 0,11 . 0,43;
64) 0,0061 . 0,00349;
65) 0,00211 . 0,0281;
66) 0,029 . 0,02027;
67) † (2,2 + 1,4) . 2,1 + (6,07 — 5,8) . 0,12;
68) † (3,1 — 0,2) (1,2 — 0,5) — (3,2 + 1,89) (6,4 — 5,8);
69) † 2,1 — (0,3 + 2,1) : 5,5 + (6,4 — 5,6) (4,1 — 3,5);
70) † 3,4 — (8,3 + 0,8) (1,3 — 0,8) + 2,6 . 3,5 — 0,8 . (3,1 — 2,4).

Multiplication irrationaler Decimalbrüche.

71) (0,347892....) . (3,257318...);
72) (0,032865....) . (0,027138...);
73) (0,070526....) . (0,0020865..);
74) (2,1004635...) . (3,145367...);
75) (3,403582...) . (5,126357...);
76) (2,18653...) . (7,135786...);
77) (3,12934...) . (2,124687...).

IV. Division.

78) 1385,3 : 700;
79) 141,83 : 1300;
80) 33,361 : 730;
81) 3587,3 : 2900;
82) 3589,1 : 1900;
83) † 32,34462 : 2,31;
84) 51,953 : 47,23;
85) 0,52537 : 0,0491;
86) 2,0687 : 1,51;
87) 3,0587 : 4,19;
88) 0,00203 : 0,007;
89) 0,706 : 59,07;
90) 1,9 : 0,1365;
91) 0,013 : 0,0022;
92) 0,3 : 0,035;
93) 0,15 : 1,7;
94) 3,163 : 0,03415;
95) 0,02478 : 0,0013;
96) 0,078 : 3,14;
97) 0,00004 : 0,00203;
98) 0,0023 : 33,14.

Division irrationaler Decimalbrüche.

99) (6,839423....) : (2,213528....);
100) (3,4271......) : (0,027385....);

101) (5,712973 ......) : (0,0315734 .....);
102) (0,023451 ......) : (4,7034 ....);
103) (5,32187 ....) : (2,369846 ......);
104) (0,023684 ......) : (0,69347 ....);
105) (4,2186 ....) : (2,6974 ....);
106) (0,00268934 ....) : (0,0487217 .....);
107) (14,68213 ......) : (16,35189 ......).

V. Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gewöhnliche Brüche.

108) 0,3333 ....;
109) 0,272727 ....;
110) 3,1414 ....;
111) 0,080808 ....;
112) 0,004004004 ....;
113) 0,0444 ....;
114) 0,0144144 ....;
115) 0,0315315315 ....;
116) 0,216666 ....;
117) 3,257878 ....;
118) 4,123555 ....

Auflösungen.

1) 0,875....; 2) 0,075; 3) 0,01171875; 4) 0,6875; 5) 0,8333....;
6) 0,363636....; 7) 0,57142857....; 8) 0,11428571428....;
9) 0,583333....; 10) 0,6153846153....; 11) 0,7333....;
12) 0,113636....; 13) 0,4729729....; 14) 0,783783....;
15) 0,004484....; 16) 0,004207....; 17) 0,006002....;
18) 0,05882....; 19) 0,002537....; 20) 0,004714....;
21) 0,2413793....; 22) 0,26923076923....; 23) 0,352941....;
24) 0,1315789....; 25) 18,47461; 26) 11,5867; 27) 9,45481;
28) 4,888; 29) 14,542536; 30) 31,3247; 31) 13,0612; 32) 16,490229;
33) 15,46767; 34) 0,3147; 35) 0,937; 36) 8,0887; 37) 2,09998;
38) 0,987; 39) 3,81665; 40) 4,039; 41) 6,1946; 42) 1,7312;
43) 5,948; 44) 3,41; 45) 8,12; 46) — 18,35; 47) 4,2971;
48) 0,045457; 49) 0,0052597; 50) 612,29; 51) 0,20339; 52) 0,21293;
53) 2,0993; 54) 0,0018421; 55) 0,18193; 56) 0,60973; 57) 1,8857;
58) 0,0061841; 59) 0,020677; 60) 0,0054391; 61) 2,3777;
62) 0,018473; 63) 0,060071; 64) 0,000021289; 65) 0,000059291;
66) 0,00058783; 67) 7,5924; 68) — 1,024; 69) — 10,62; 70) 7,39;
71) 1,13319$\underline{3}$*)....; 72) 0,00089$\underline{1}$86....; 73) 0,0001471$\underline{5}$1....;
74) 6,6067$\underline{2}$84....; 75) 17,4479$\underline{7}$3....; 76) 15,602$\underline{5}$7....;
77) 6,648$\underline{8}$3....; 78) 1,979; 79) 0,1091; 80) 0,0457; 81) 1,237;
82) 1,889; 83) 14,002; 84) 1,1; 85) 10,7; 86) 1,37; 87) 0,73;
88) 0,29; 89) 0,01195192....; 90) 13,9194139....; 91) 5,9090....;

*) Die unterstrichenen Ziffern der Auflösungen sind unsicher.

92) 8,571428. . .; **93**) 0,08823529. . . .; **94**) 92,620790. . . .; **95**) 19,0615384. . . .; **96**) 0,02484076. . . .; **97**) 0,0197044. . . .; **98**) 0,000069402. . . .; **99**) 3,08983. . . .; **100**) 125,14. . . .; **101**) 180,942. . . .; **102**) 0,004985. . . .; **103**) 2,24566. . . .; **104**) 0,03415. . .; **105**) 1,5639. . . .; **106**) 0,05519. . . .; **107**) 0,89788. . . .;

108) $\frac{1}{3}$; 109) $\frac{3}{11}$; 110) $3\frac{14}{99}$; 111) $\frac{8}{99}$; 112) $\frac{4}{999}$; 113) $\frac{2}{45}$;

114) $\frac{8}{555}$; 115) $\frac{7}{222}$; 116) $\frac{13}{60}$; 117) $3\frac{851}{3300}$; 118) $4\frac{139}{1125}$.

D. Von den benannten Zahlen.

§. 78. Erklärung.

Eine benannte Zahl bezeichnet eine bestimmte Menge gleichartiger Dinge (Größen), besteht also aus einer unbenannten Zahl und dem gemeinschaftlichen Namen jener Dinge. Ihre allgemeine Form ist xA, wo x die unbenannte Zahl, A den Namen bedeutet. A heißt das Maß, x die Maßzahl. Nach der Erklärung ist x eine ganze Zahl.

Anm. Man nennt auch wohl x das Maß, A das Gemäß.

§. 79. Erklärung.

Für das Rechnen mit benannten Zahlen ist nur nachzuweisen, in welcher Art sich dieselben untereinander, oder mit unbenannten Zahlen durch irgend eine der vier ersten Operationen verbinden lassen, so daß die Verbindung wiederum eine benannte oder unbenannte Zahl bezeichnet.

§. 80. Erklärung.

Zwei Zahlen sind gleichartig benannt, wenn sie dasselbe Maß haben, wie xA und yA. Es ist alsdann

$$xA \gtreqless yA, \text{ je nachdem } x \gtreqless y \text{ ist.}$$

Für gleichartig benannte Zahlen gelten folglich die Sätze aus §. 4.

Zwei Zahlen sind ungleichartig benannt, wenn sie verschiedene Maße haben, wie xA und yB. Dieselben lassen sich im Allgemeinen weder mit einander vergleichen, noch auch zu einer dritten Zahl verbinden. Da es jedoch zum Begriff der Größe gehört, daß sie theilbar ist, so kann auch einmal B einen Theil von A bezeichnen, oder umgekehrt, so daß überhaupt mA = nB ist. Alsdann heißen A und B verwandte Größen, und diese lassen sich mit einander vergleichen.

§. 81. Erklärung.

1) Unter der Summe $xA + yA$ versteht man diejenige benannte Zahl, welche soviel Größeneinheiten A enthält, als die Summanden xA und yA zusammen. Es ist folglich

$$xA + yA = (x + y)\,A.$$

2) Unter der Differenz $xA - yA$ versteht man diejenige benannte Zahl, zu welcher man yA hinzuaddiren muß, um xA zu erhalten. Es ist folglich

$$xA - yA = (x - y)\,A.$$

3) Der Ausdruck $xA \mp yB$ hat für die Rechnung nur dann einen Sinn, wenn A und B verwandte Größen sind. Alsdann läßt sich zwar $xA \mp yB$ nicht unmittelbar durch eine einzige benannte Zahl ausdrücken, jedoch läßt sich, weil B einen Theil von A bezeichnet (§. 80), die Lösung dieser Aufgabe wenigstens als möglich denken. Unter der Summe $xA + yB$ versteht man daher eine noch zu suchende benannte Zahl, welche sich in die Theile xA und yB zerlegt denken läßt, unter der Differenz $xA - yB$ eine solche, zu der man yB addiren muß, um xA zu erhalten. Ausdrücke von der Form $xA + yB + zC + \ldots$, wie z. B. 6 Rthlr. 7 Sgr. 8 Pf., heißen zusammengesetzte benannte Zahlen. Unter der Summe mehrerer zusammengesetzten benannten Zahlen versteht man diejenige zusammengesetzte benannte Zahl, welche soviel Größeneinheiten A, B, C u. s. w. hat, als die einzelnen Summanden zusammen, ferner unter der Differenz zweier solchen Zahlen diejenige, zu welcher man den Subtrahenden addiren muß, um den Minuenden zu erhalten. Es ist daher

$$(xA + yB + zC) + (vA + wB + uC) =$$
$$(x + v)\,A + (y + w)\,B + (z + u)\,C, \text{ ferner}$$
$$(xA + yB + zC) - (vA + wB + uC) =$$
$$(x - v)\,A + (y - w)\,B + (z - u)\,C.$$

Aus den gegebenen Erklärungen folgt, daß beim Addiren und Subtrahiren gleichartig benannter Zahlen die Rechnung nur an den Maßzahlen ausgeführt wird, und daß folglich die in Capitel I. hierüber aufgestellten Sätze anwendbar bleiben.

Anm. 1. In der Differenz $xA - yA = (x - y)\,A$ kann $x - y$ negativ sein. Nun ist zwar eine Größe nie negativ, aber es können zwei Größen eine solche Beziehung zu einander haben, daß überall, wo die eine derselben additiv ist, die andere subtractiv sein muß, wie z. B. Vermögen und Schulden. Aus a Rthlr. Vermögen und b Rthlr. Schulden entstehen $(a - b)$ Rthlr. Vermögen, wenn $a > b$, hingegen $(b - a)$ Rthlr. Schulden, wenn $b > a$ ist. Der Gleichförmigkeit wegen gebraucht man indessen in beiden Fällen die Form

(a — b) Rh. Vermögen, versteht aber dann unter (— x) Rh. Vermögen nach dem Gesagten x Rh. Schulden. In diesem Sinne kann man also auch mit negativen benannten Zahlen rechnen. Größen, zwischen denen eine derartige Beziehung stattfindet, heißen entgegengesetzt.

Anm. 2. Benannte und unbenannte Zahlen lassen sich durch Addition und Subtraction nicht mit einander verbinden.

§. 82. Erklärung.

Unter dem Produkt (xA) . m versteht man die Summe

$$\overset{1}{x}A + \overset{2}{x}A + \ldots + \overset{m}{x}A,$$

oder (nach §. 81) die benannte Zahl

$$(\overset{1}{x} + \overset{2}{x} + \ldots + \overset{m}{x})\,A = (xm)\,A.$$

Eine benannte Zahl wird also mit einer unbenannten multiplicirt, indem man ihre Maßzahl multiplicirt, und es ist deshalb

$$(xA) \,.\, m = (mA) \,.\, x = (xm)\,A.$$

Aus der Erklärung ergeben sich noch folgende Sätze:

1) Ist $xA = yA$, so ist auch $(xA) \,.\, m = (yA) \,.\, m$.

2) $(xA \mp yB) \,.\, m = xmA \mp ymB$.

Anm. Produkte aus benannten Zahlen, wie $xA \,.\, yB$ kann es nicht geben, da sich keine Summe aus yB Summanden bilden läßt. Aus demselben Grunde hat auch der Ausdruck $m \,.\, (xA)$ keine unmittelbare Bedeutung, doch kann man ihn als andere Schreibform für $(xA) \,.\, m$ betrachten und gebrauchen.

§. 83. Erklärung.

Unter dem Quotienten $(xA) : m$ versteht man diejenige benannte Zahl, welche man mit m multipliciren muß, um xA zu erhalten, welche also den mten Theil von xA bezeichnet. (Vergl. §. 37, Anm. 1).

Da die benannte Zahl $(x : m)$ A diese Eigenschaft hat, so ist

$$\frac{xA}{m} = \frac{x}{m}\,A.$$

Eine benannte Zahl wird also durch eine unbenannte dividirt, indem man ihre Maßzahl dividirt, und es sind daher alle die Umformungen anwendbar, deren Richtigkeit für Quotienten aus unbenannten Zahlen nachgewiesen ist. Außerdem ergeben sich folgende Sätze:

1) Ist $xA = yA$, so ist auch $\frac{x}{m}\,A = \frac{y}{m}\,A$.

2) $\frac{xA \mp yB}{m} = \frac{x}{m} A \mp \frac{y}{m} B.$

3) $\frac{x}{m} A \mp \frac{y}{n} A = \left(\frac{x}{m} \mp \frac{y}{n}\right) A.$

Anm. Diese Gleichungen sind (nach §. 78) zunächst nur anwendbar, wenn die Quotienten $(x:m)$ u. s. w. ganze Zahlen bezeichnen. Gebraucht man indessen das Zeichen $\frac{x}{m}$ A unter Beibehaltung der oben gegebenen Erklärung auch dann, wenn $(x:m)$ keine ganze Zahl ist, so hat es wenigstens die Bedeutung einer Rechnungsform, für welche das in §§. 43 und 44 Gesagte ebenfalls gilt.

§. 84. Erklärung.

Unter dem Quotienten $\frac{xA}{yA}$ versteht man diejenige unbenannte Zahl, mit welcher man yA multipliciren muß, um xA zu erhalten, welche also angiebt, wie oft yA in xA enthalten ist. (Vergl. §. 37, Anm. 1). Da die unbenannte Zahl $\frac{x}{y}$ diese Eigenschaft hat, so ist

$$\frac{xA}{yA} = \frac{x}{y}.$$

In dieser Gleichung nennt man $(x : y)$ das Verhältniß der beiden benannten Zahlen xA und yA.

Es ist folglich $\frac{xA}{yA} = \frac{xB}{yB} = \frac{xC}{yC}$ u. s. w.,

und wenn $\frac{x}{y} = \frac{v}{w}$ ist,

so ist auch $\frac{xA}{yA} = \frac{vA}{wA} = \frac{vB}{wB}$ u. s. w.

Anm. Der Quotient $\frac{xA}{yB}$ hat keine Bedeutung, (wenn nicht etwa A und B verwandte Größen sind), ebensowenig der Quotient $x : yA$.

§. 85. Erklärung.

Läßt sich eine Größe M in x gleiche Theile zerlegen, von denen jeder eine selbständige Größe (N) bildet, so ist $M = xN$, und man hat alsdann M durch N gemessen. Durch die Messung werden also Größen als benannte Zahlen dargestellt, und zwar giebt die Maßzahl an, wie oft das Maß

in der gemessenen Größe enthalten sei. Ist A das Maß einer Größe, so ist auch $\frac{A}{m}$ ein solches, aber nicht umgekehrt. Man kann zwar in letzterem Falle $x\frac{A}{m} = \frac{x}{m}A$ setzen und die durch $\frac{A}{m}$ gemessene Größe mit Hülfe des Maßes A bezeichnen, aber die gebrochene benannte Zahl $\frac{x}{m}A$ ist nur eine Rechnungsform und sagt eigentlich weiter Nichts, als daß $\frac{A}{m}$ das Maß, x die Maßzahl ist. Die Anwendung dieser Rechnungsform bietet jedoch viele Vortheile, und insbesondere kann man alsdann verwandte Größen durch gleichartig benannte Zahlen darstellen.

Sobald man eine Größe gemessen und als benannte Zahl dargestellt hat, so sind alle in diesem Abschnitte aufgestellten Sätze auf dieselbe anwendbar. Sie sind es jedoch auch dann, wenn man eine Größe nicht erst mißt, sondern als eine Einheit betrachtet, also z. B. $M = 1M$ setzt. Es enthält daher dieser Abschnitt alles das, was von Größen jeder Art gilt und von nun an als richtig vorausgesetzt werden kann, wenn besondere Arten von Größen betrachtet werden sollen. Man kann folglich die Lehre von den benannten Zahlen auch die allgemeine Größenlehre nennen.

§. 86. Aufgaben.

1) Verwandte Größen durch gleichartig benannte Zahlen zu bezeichnen.

2) Die Summe oder Differenz verwandter Größen durch eine einzige benannte Zahl auszudrücken.

Auflösung zu 1. Ist $mA = nB$, $xB = yC$, $vC = wD$ u. s. w., so ist $A = \frac{n}{m}B$, $B = \frac{y}{x}C$, $C = \frac{w}{v}D$ u. s. w., folglich

$$A = \frac{n}{m}B \quad = \frac{ny}{mx}C \quad = \frac{nyw}{mxv}D \text{ u. s. w.}$$

In derselben Art lassen sich die übrigen Größen durch einander ausdrücken.

Auflösung zu 2. Ist $mA = nB$, so ist

$$xA \mp yB = xA \mp \frac{ym}{n}A = \frac{xn \mp ym}{n}A, \text{ oder}$$

$$xA \mp yB = \frac{xn}{m}B \mp yB \quad = \frac{xn \mp ym}{m}B.$$

Drittes Kapitel.

Von den ganzen Potenzen und Wurzeln und von der numerischen Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

A. Von den ganzen Potenzen.

§. 87. Erklärung.

Die Zahl a mit der Zahl m potenziren heißt ein Produkt bilden aus m Faktoren, von denen jeder a ist. Dies Produkt wird dargestellt durch das Zeichen a^m (ausgesprochen a hoch m, oder a in der m^ten Potenz). Man nennt a^m eine ganze Potenz, a den Dignanden, m den Exponenten, und versteht nach der Erklärung unter a eine beliebige reelle, unter m eine positive, ganze Zahl. Es ist also z. B.

$$a^4 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a;$$

$$4^3 = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 64;$$

$$(-2)^3 = (-2) \,.\, (-2) \,.\, (-2) = -8.$$

Anm. 1. Eine ganze Potenz hat (nach §. 47) nur einen Werth.

Anm. 2. Die zweite Potenz einer Zahl heißt auch ihr Quadrat, die dritte ihr Kubus oder Würfel, die vierte ihr Biquadrat. Die erste Potenz ist die Zahl selbst.

§. 88. Grundsatz.

Gleiches mit Gleichem potenzirt giebt Gleiches, oder:

1) Ist $a = b$, so ist auch $a^m = b^m$.

2) Ist $a = b$, so ist auch $m^a = m^b$.

§. 89. Lehrsätze.

1) $1^m = 1$;

2) $0^m = 0$;

3) Die m^te Potenz einer negativen Zahl ist positiv, wenn m gerade, hingegen negativ, wenn m ungerade ist.

Beweise zu 1—3. Dieselben ergeben sich aus §. 87.

§. 90. Lehrsätze.

1) $(a \,.\, b)^m = a^m \,.\, b^m$;

2) $(a : b)^m = a^m : b^m$;

3) $(a \mp b)^m = (a \mp b)^m$.

Beweis zu 1. Es ist $(ab)^m = ab \,.\, ab \,.\, ab \ldots = a^m \,.\, b^m$.

Beweis zu 2. Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots = \frac{a^m}{b^m}$.

Anm. 1. Der Lehrsatz 3) soll anzeigen, daß die Potenz $(a \mp b)^m$ sich nicht in einfacher Art umformen läßt. Als besondere Fälle sind zu merken:

$$(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2;$$
$$(a \mp b)^3 = a^3 \mp 3a^2b + 3ab^2 \mp b^3.$$

Anm. 2. Aus 1) und 2) ergeben sich folgende und ähnliche Umformungen:

$(2abc)^3 = 8a^3b^3c^3$; $12^4 = 2^4 . 6^4 = 4^4 . 3^4$;

$2(abc)^3 = 2a^3b^3c^3$; $5a^3 + 8a^3 = 13a^3$;

$(2 : 3)^4 = 2^4 : 3^4 = 16 : 81$.

§. 91. Lehrsätze.

1) $a^{m+n} = a^m \,.\, a^n$;

2) $a^{m-n} = a^m : a^n$;

3) $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

Beweis zu 1. Die Potenz a^{m+n} besteht aus $m + n$ Faktoren. Schließt man die ersten m Faktoren in Klammern, ebenso die nachfolgenden n Faktoren, so erhält man den Ausdruck $a^m \,.\, a^n$.

Beweis zu 2. Die Potenz a^{m-n} besteht aus $m - n$ Faktoren a; dasselbe gilt für den Quotienten $a^m : a^n$. — Es ist hierbei zu beachten, daß m größer als n sein muß.

Beweis zu 3. Es ist $mn = \overset{1}{m} + \overset{2}{m} + \overset{3}{m} + \ldots + \overset{n}{m}$,

oder auch $mn = \overset{1}{n} + \overset{2}{n} + \overset{3}{n} + \ldots + \overset{m}{n}$;

daher ist $a^{mn} = a^m \,.\, a^m \,.\, a^m \,.\, \ldots = (a^m)^n$,

oder auch $a^{mn} = a^n \,.\, a^n \,.\, a^n \,.\, \ldots = (a^n)^m$.

Anm. Aus den aufgestellten Lehrsätzen ergeben sich folgende und ähnliche Umformungen:

$(a^7 . a^3) : a^6 = a^4$; $6a^2 . 7a^3 = 42a^5$;

$12a^5 : 4a^3 = 3a^2$; $(a^3)^4 = a^{12} = (a^2)^6$;

$4a^2 + 2a^3 = 2a^2 (2 + a)$.

§. 92. Lehrsätze.

1) Ein ächter Bruch wird durch fortgesetztes Potenziren immer kleiner, ein unächter immer größer.

2) Sind a und b positive (ganze oder gebrochene) Zahlen, und ist $a > b$, so ist auch $a^m > b^m$.

Beweis zu 1. Bezeichnet a einen ächten Bruch, so ist $a < 1$, oder $a = 1 - x$ (§. 44), daher $a^2 = a(1 - x) = a - ax$. Folglich ist $a^2 < a$, und in derselben Art ergiebt sich, daß $a^3 < a^2$ sein muß u. s. w. Der zweite Theil des Satzes wird bewiesen, indem man $a = 1 + x$ setzt.

Beweis zu 2. Ist $a > b$, so ist $\frac{b}{a}$ ein ächter Bruch. Dieser wird durch fortgesetztes Potenziren immer kleiner, und es ist folglich $a^m > b^m$.

B. Von den ganzen Wurzeln.

§. 93. Erklärung.

Die Zahl a durch die Zahl m radiziren heißt eine Zahl suchen, deren m^{te} Potenz gleich a ist. Die gesuchte Zahl wird dargestellt durch das Zeichen $\sqrt[m]{a}$ (ausgesprochen m^{te} Wurzel aus a). Man nennt $\sqrt[m]{a}$ eine Wurzel, a den Radicanden, b den Wurzelexponenten. Es ist also

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a.$$

Aus der gegebenen Erklärung folgt, daß m eine positive ganze Zahl bedeuten muß, während a und $\sqrt[m]{a}$ überhaupt nur reelle Zahlen zu sein brauchen. Nun ergiebt sich aber aus den Regeln des Potenzirens, daß die 2^{ten}, 4^{ten} u. s. w. Potenzen der reellen Zahlen niemals negativ sind (§. 89, 3),

daß also umgekehrt die negativen Zahlen keine 2^{ten}, 4^{ten} u. s. w. Wurzeln (im Sinne obiger Erklärung) haben können, und daß folglich das Zeichen $\sqrt[m]{a}$ nicht nothwendig eine reelle Zahl bezeichnet, auch wenn a eine solche ist.

Man unterscheidet deshalb ganze und allgemeine Wurzeln. Bei ersteren ist der Radicand eine absolute Zahl, oder Null, bei letzteren eine reelle Zahl.

Die nachfolgenden §§. handeln nur von ganzen Wurzeln.

Anm. Die zweite Wurzel aus einer Zahl heißt auch deren Quadratwurzel, die dritte die Kubikwurzel. Die erste Wurzel ist die Zahl selbst. Wenn die mte Wurzel aus einer Zahl a eine Zahl der Zahlenreihe ist, so nennt man a im Allgemeinen eine Potenzzahl, im Einzelnen eine Quadrat-, Kubikzahl u. s. w. — Statt des Zeichens $\sqrt[2]{a}$ schreibt man gewöhnlich kürzer $\sqrt{a}$.

§. 94. Erklärung.

Ist $\sqrt[m]{a}$ eine ganze Wurzel, ferner $a > 0$, so lassen sich stets zwei absolute Zahlen x und y von der Eigenschaft angeben, daß $x^m > a$, $y^m < a$ ist. Zwischen x und y muß daher eine absolute Zahl wenigstens gedacht werden können, deren m^{te} Potenz gleich a ist.

Diese Zahl nennt man den absoluten Wurzelwerth. Wenn nur dieser berücksichtigt werden soll, so heißt die Wurzel eindeutig; sie bezeichnet alsdann eine ganz bestimmte Zahl, da es (§. 92, 2) nicht zwei verschiedene absolute Zahlen geben kann, deren m^{te} Potenzen einander gleich wären. Wenn aber außerdem berücksichtigt werden soll, daß eine Wurzel vielleicht mehrere Werthe haben, daß z. B. zum absoluten Wurzelwerthe jedes der beiden Vorzeichen hinzutreten könne, so heißt die Wurzel mehrdeutig. Es ist daher z. B. $\sqrt{36} = 6$, wenn die Wurzel eindeutig genommen wird, sonst aber $\sqrt{36} = \mp 6$.

Das Nachfolgende bezieht sich, so weit nicht das Gegentheil bemerkt wird, nur auf eindeutige Wurzeln.

Ein Wurzelwerth heißt rational, wenn er sich durch eine ganze oder eine gebrochene Zahl, er heißt irrational, wenn er sich nur durch Näherungswerthe angeben läßt, d. h. durch Zahlen, welche wenig von dem wahren Werthe abweichen.

§. 95. Grundsatz.

Gleiches durch Gleiches radizirt giebt Gleiches, oder:

1) Ist $a = b$, so ist auch $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$.

2) Ist $a^m = b^m$, so ist auch $a = b$.

Anm. Es darf nicht übersehen werden, daß alle diese Ausdrücke absolute Zahlen bezeichnen.

§. 96. Lehrsätze.

1) $\sqrt[m]{a^m} = a$;

2) $\sqrt[m]{1} = 1$;

3) $\sqrt[m]{0} = 0$;

4) Die m^{te} Wurzel aus einer jeden absoluten Zahl nähert sich desto mehr der Einheit, je größer m ist.

Beweise zu 1, 2, 3. Dieselben folgen aus §§. 93 und 94.

Beweis zu 4. Derselbe folgt aus §. 92, 1.

§. 97. Lehrsätze.

1) $\sqrt[m]{a \,.\, b} = \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b}$;

2) $\sqrt[m]{a : b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$;

3) $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$;

4) $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^n$;

5) $\sqrt[m]{a^n} = a^{n : m}$;

6) $\sqrt[m]{a \mp b} = \sqrt[m]{a \mp b}$.

Beweise zu 1 und 2. Potenzirt man beide Seiten der Gleichungen mit m, so erhält man auf beiden Seiten Gleiches.

Beweis zu 3. Es ist $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a \,.\, a \,.\, a \ldots} =$

$$\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{a} \ldots = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n.$$

Beweise zu 4 und 5. Dieselben folgen aus 3. In 5 muß aber n : m eine ganze Zahl sein.

Anm. 1. Die Gleichung 6) giebt an, daß sich aus einer Summe oder Differenz im Allgemeinen keine Wurzel ziehen läßt. Jedoch ist (nach §. 90)

$$\sqrt[2]{a^2 \mp 2ab + b^2} = a \mp b; \quad \sqrt[3]{a^3 \mp 3a^2b + 3ab^2 \mp b^3} = a \mp b.$$

Anm. 2. Aus den aufgestellten Lehrsätzen ergeben sich folgende und ähnliche Umformungen:

$$\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b}; \qquad \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3};$$

$$a : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m : b}; \qquad {}^1\!/_2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{({}^1\!/_2)^3 : 3} = \sqrt[3]{{}^1\!/_{24}};$$

$$\sqrt{a : b} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}; \qquad \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

§. 98. Lehrsätze.

1) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$;

2) $\sqrt[mn]{a^{pn}} = \sqrt[m]{a^p}$;

3) $\sqrt[m:n]{a^{p:n}} = \sqrt[m]{a^p}$;

4) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:n]{a}$;

5) $\sqrt[m \mp n]{a} = \sqrt[m \mp n]{a}$;

6) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n \cdot b^m}$;

7) $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n : b^m}$.

8) Ist $a^m = b^n$, so ist auch $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{b}$, und umgekehrt.

Beweis zu 1. Potenzirt man jeden der drei Ausdrücke mit mn, so erhält man jedesmal a.

Beweis zu 2. Er folgt aus 1 und aus §. 97, 4.

Beweis zu 3. Er folgt aus 2. Es müssen jedoch m und p durch n theilbar sein.

Beweis zu 4. Er folgt aus 3, wenn man p = n setzt. Es muß jedoch m durch n theilbar sein. (Vergl. §. 97, 5).

Beweis zu 6. Es ist $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \cdot \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n \cdot b^m}$.

Beweis zu 7. Er wird ebenso geführt.

Beweis zu 8. Ist $a^m = b^n$, so ist auch $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[mn]{b^n}$,

oder $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{b}$.

Anm. Aus den aufgestellten Lehrsätzen ergeben sich folgende und ähnliche Umformungen:

$$\sqrt[6]{81} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[3]{9}; \quad \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[2]{7};$$

$$\sqrt[2]{3} \,.\, \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{3^3 \,.\, 4^2} = \sqrt[6]{27 \,.\, 16};$$

$$\sqrt[8]{3^6 \,.\, 5^4} = \sqrt[8]{3^6} \,.\, \sqrt[8]{5^4} = \sqrt[4]{3^3} \,.\, \sqrt[2]{5}.$$

Aufgaben zu den Abschnitten A und B.

I. Multiplication und Division.

1) $(2a^4 + 5a^3b - a^2b^2 + 4ab^3) \,.\, (3a^2 + 8ab - b^2)$;

2) $(a^4 + 4a^3x + 12a^2x^2 + 16ax^3 + 16x^4) \,.\, (a^2 - 4ax + x^2)$;

3) $(7a^3 - 5a^2b + 6ab^2 - 2b^3) \,.\, (3a^4 - 4a^3b + 16a^2b^2)$;

4) $(2a^2b + 4a^3c^2 - 3c^3b) \,.\, (4a^2b - 3a^3c^2 - 2c^3b)$;

5) $(-5a^4 + 5a^3b - 7a^2b^2 + 3ab^3 + 3b^4) \,.\, (3a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 2b^3)$;

6) $(3x^3y^2 + 4x^2yz^2 + 5x^3z^2) \,.\, (3x^3y^2 - 4x^2yz^2 + 5x^3z^2)$;

7) $\left(\frac{1}{3}x^2 + 4xy - 2\frac{1}{2}y^2\right) \,.\, \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - 3y^3\right)$;

8) $\left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2y + \frac{3}{5}xy^2 - 2y^3\right) \,.\, \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^2y + xy^2 - \frac{1}{2}y^3\right)$;

9) $\left(\frac{2a^2b^3}{3c^3} - \frac{5a^3b^4}{2c^3d} - \frac{3a^3b^5}{4c^4d^2}\right) \,.\, \left(\frac{2a^2b^3}{3c^3} + \frac{5a^3b^4}{2c^3d} + \frac{3a^3b^5}{4c^4d^2}\right)$;

10) $\left(\frac{a^2bc}{3d^2} - \frac{4a^3b^2}{d^3} - \frac{bc^3}{d}\right) \,.\, \left(\frac{3a^3c^2}{d^3} - \frac{4d^4}{3a^3b^2c^4}\right)$;

11) $(a^{m+1}b^n - 3a^{m-2}b^{n+1} - 2a^{m-4}b^{n+3}) \,.\, (a^{m+3}b^{n-3} + a^{m+5}b^{n-4})$;

12) $(a^{m+n-3}b^n - 5a^{m+n-2}b^{n+1}) \,.\, (a^{2n+2}b^3 - 3a^{2n+3}b^4)$;

13) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 3\sqrt{10}) \,.\, 2\sqrt{5}$; 14) $\left(\sqrt{6} + \sqrt[3]{2} - 2\sqrt[4]{5}\right) \,.\, \sqrt{3}$;

15) $(7+2\sqrt{6})\cdot(9-5\sqrt{6})$;

16) $(3\sqrt{5}+2\sqrt{6}-2)\,.\,(2\sqrt{5}+18\sqrt{6})$;

17) $(2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt[3]{9})$;

18) $(20x^3+31x^2y+5x^2-20xy^2+4xy-24y^3-8y^2):(5x^2+4xy-8y^2)$;

19) $(24a^4+50a^3b+17a^2b^2-31ab^3-15b^4):(3a^2+7ab+5b^2)$;

20) $(8a^4b^5+22a^3b^6-7a^2b^7-29ab^8+12b^9):(4a^2b^3+5ab^4-3b^5)$:

21) $(9a^4b^2-16a^2b^2c^2+40a^2b^2cd-16a^2bc^2d-25a^2b^2d^2+20a^2bcd^2-$
$4a^2c^2d^2):(3a^2b+4abc-5abd+2acd)$;

22) $a^6-25a^4b^2+40a^3bc^2+6a^3d-16a^2c^4+9d^2):$
$(a^3-5a^2b+4ac^2+3d)$;

23) $\left(\frac{8}{15}a^4+4\frac{13}{15}a^3b-2\frac{2}{9}a^2+10a^2b^2-7\frac{7}{12}ab+\frac{5}{6}\right):$
$\left(\frac{4}{5}a^2+2\frac{1}{2}ab-\frac{1}{3}\right)$;

24) $\left(\frac{1}{4}a^5-1\frac{1}{3}a^4b-\frac{19}{30}a^3b^2-1\frac{23}{90}a^2b^3+1\frac{2}{15}ab^4-\frac{1}{9}b^5\right):$
$\left(\frac{1}{2}a^2-3ab+\frac{1}{3}b^2\right)$;

25) $\left(\frac{a^4}{b^6}-\frac{4c^6d^8}{b^{10}}+\frac{14c^5d^4}{a^4b^8}-\frac{49c^4}{4a^8b^6}\right):\left(\frac{a^2}{b^3}-\frac{2c^3d^4}{b^5}+\frac{7c^2}{2a^4b^3}\right)$;

26) $\left(\frac{a^3c}{b^5}+\frac{a^4c}{b^4}-\frac{7a^5c}{b^3}-\frac{3a^6c}{b^2}+\frac{a^2c^3}{b^2}-\frac{2a^3c^3}{b}-a^4c^3\right):\left(\frac{a}{b^3}+\frac{3a^2}{b^2}+c^2\right)$;

27) $(8a^{2m}b^2-26a^{2m+1}b^3+7a^{2m+2}b^4+20a^{2m+3}b^5):(2a^mb-5a^{m+1}b^2)$;

28) $(6a^{2m+1}b^{2n-3}-a^{2m+2}b^{2n-2}-12a^{2m+3}b^{2n-1}):(3a^{m-n}b^{n-2}+$
$4a^{m-n+1}b^{n-1})$;

29) $(5\sqrt{20}-3\sqrt{12}-4):2\sqrt{4}$; 30) $(30-20\sqrt[6]{72}+10\sqrt[6]{2}):5\sqrt{2}$;

31) $(24a^2-22ab\sqrt{6}+24b^2):(3a\sqrt{2}-4b\sqrt{3})$;

32) $(12a^3b-29a^3\sqrt{bc}+15a^3c):(3a\sqrt{ab}-5a\sqrt{ac})$.

II. Reduction.

33) $\frac{a^8b^5-2a^5b^5c}{a^3c^4d^2-2c^5d^2}$; 34) $\frac{a^6b^2c^3-a^4b^4c^3}{a^4b^2c^7-a^4b^6c^3}$;

35) $\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2+2bc-c^2}$; 36) $\frac{m^2y^v-ny^{v+1}}{dym^2-dny^2}$;

37) $\frac{ca^{m+n}-ba^3+a^n}{ca^{2n}-ba^{3+n-m}+a^{2n-m}}$; 38) $\frac{10a^{m+n}cd^{n+2}-14a^nb^mcd^{n+2}}{25a^{n+2}b^2c^nd-35a^{n-m+2}b^{m+2}c^nd}$;

39) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^8\cdot\left(\frac{49}{40}\right)^4\left(\frac{100}{9}\right)^2$; 40) $\frac{13^2:(15:11)^3}{143^2:30^3}$;

41) $\dfrac{(42:15)^4 \cdot 35}{15:[5^4:(2 \cdot 14^4)]}$; **42)** $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{9}{14}\right)^2\right] + \dfrac{6^2+1}{7^3}$;

43) $\sqrt{ax} + [ax:(a - \sqrt{ax})]$; **44)** $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + \sqrt{ab} - \dfrac{(a-b)\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

Auflösungen.

1) $6a^6 + 31a^5b + 35a^4b^2 - a^3b^3 + 33a^2b^4 - 4ab^5$; **2)** $a^6 - 16a^3x^3 + 64x^6$; **3)** $21a^7 - 43a^6b + 150a^5b^2 - 110a^4b^3 + 104a^3b^4 - 32a^2b^5$;

4) $8a^4b^2 + 10a^5bc^2 - 16a^2b^2c^3 - 12a^6c^4 + a^3bc^5 + 6c^6b^2$;

5) $-15a^7 + 40a^6b - 66a^5b^2 + 74a^4b^3 - 44a^3b^4 + 11a^2b^5 + 6ab^6 - 6b^7$;

6) $9x^6y^4 + 30x^6y^2z^2 - 16x^4y^2z^4 + 25x^6z^6$;

7) $\frac{1}{9}x^5 + 1\frac{1}{9}x^4y - 3\frac{1}{3}x^3y^2 + 2\frac{2}{3}x^2y^3 - 13\frac{1}{4}xy^4 + 7\frac{1}{2}y^5$;

8) $\frac{1}{3}x^6 - 1\frac{4}{9}x^5y + 2\frac{3}{10}x^4y^2 - 3\frac{11}{15}x^3y^3 + 2\frac{14}{15}x^2y^4 - 2\frac{3}{10}xy^5 + y^6$;

9) $\dfrac{4a^4b^6}{9c^6} - \dfrac{25a^6b^8}{4c^6d^2} - \dfrac{15a^6b^9}{4c^7d^4} - \dfrac{9a^6b^{10}}{16c^8d^4}$;

10) $\dfrac{a^5bc^3}{d^5} - \dfrac{12a^6b^2c^2}{d^6} - \dfrac{3a^3bc^5}{d^4} - \dfrac{4d^2}{9abc^3} + \dfrac{16d}{3c^4} + \dfrac{4d^3}{3a^3bc}$;

11) $a^{2m+4}b^{2n-3} - 3a^{2m+1}b^{2n-2} - 2a^{2m-1}b^{2n} + a^{2m+6}b^{2n-4}$
$- 3a^{2m+3}b^{2n-3} - 2a^{2m+1}b^{2n-1}$;

12) $a^{m+3n-1}b^{n+3} - 8a^{m+3n}b^{n+4} + 15a^{m+3n+1}b^{n+5}$;

13) $10 + 4\sqrt{35} + 6\sqrt{50}$; **14)** $\sqrt{18} + \sqrt[6]{108} - 2\sqrt[4]{45}$;

15) $3 - 17\sqrt{6}$; **16)** $246 + 58\sqrt{30} - 4\sqrt{5} - 36\sqrt{6}$;

17) $4\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt{18} + 6\sqrt[6]{3}$; **18)** $4x + 3y + 1$;

19) $8a^2 - 2ab - 3b^2$; **20)** $2a^2b^2 + 3ab^3 - 4b^4$;

21) $3a^2b - 4abc + 5abd - 2acd$; **22)** $a^3 + 5a^2b - 4ac^2 + 3d$;

23) $\frac{2}{3}a^2 + 4ab - 2\frac{1}{2}$; **24)** $\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{3}a^2b + \frac{2}{5}ab^2 - \frac{1}{3}b^3$;

25) $\dfrac{a^2}{b^3} + \dfrac{2c^3d^4}{b^5} - \dfrac{7c^2}{2a^4b^3}$; **26)** $\dfrac{a^2c}{b^2} - \dfrac{2a^3c}{b} - a^4c$;

27) $4a^mb - 3a^{m+1}b^2 - 4a^{m+2}b^3$;

28) $2a^{m+n+1}b^{n-1} - 3a^{m+n+2}b^n$;

29) $2\frac{1}{2}\sqrt{5}-1\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{4}$; **30)** $3\sqrt{2}-4\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$;

31) $4a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}$; **32)** $4a\sqrt{ab}-3a\sqrt{ac}$; **33)** $\frac{a^5b^5}{c^4d^2}$;

34) $\frac{a^2-b^2}{c^4-b^4}$; **35)** $\frac{a+b+c}{a-b+c}$; **36)** $\frac{y^v-1}{d}$; **37)** $\frac{a^m}{a^n}$;

38) $\frac{2a^m-2d^n+1}{5b^2c^n-1}$; **39)** $\frac{1}{24}$; **40)** 88; **41)** $\frac{7}{6}$; **42)** $\frac{1}{7}$;

43) $\frac{a\sqrt{ax}}{a-\sqrt{ax}}$; **44)** $\sqrt{ab}$.

C. Von der numerischen Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzeln.

§. 99. Erklärung.

Die Berechnung einer Wurzel heißt numerisch, wenn der Radicand eine absolute Zahl ist, und man nur den absoluten Wurzelwerth bestimmen soll.

Für die weitere Benutzung der absoluten Wurzelwerthe ist zu merken:

1) Die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl hat zwei reelle Werthe, da zum absoluten Wurzelwerthe jedes der beiden Vorzeichen hinzutreten kann; die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl hingegen kann keine reelle Zahl sein (§. 93).

2) Die Kubikwurzel aus einer positiven Zahl ist positiv, aus einer negativen negativ. Mehr als einen reellen Werth kann eine Kubikwurzel nicht haben.

§. 100. Erklärung.

Als Hülfsmittel zur numerischen Berechnung der Quadratwurzeln ist Folgendes zu merken:

1) Aus $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$ u. s. w. folgt, daß $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{36}=6$, $\sqrt{49}=7$, $\sqrt{64}=8$, $\sqrt{81}=9$, $\sqrt{100}=10$ ist.

2) Aus $1^2=1$, $10^2=100$, $100^2=10000$ u. s. w. folgt, daß die Quadrate der einziffrigen Zahlen zwischen 1 und 100 liegen, folglich 1 oder 2 Stellen haben, ferner daß die Quadrate der zweiziffrigen Zahlen zwischen 100 und 10000 liegen, also 3 oder 4 Stellen haben, u. s. w.

Man erhält also eine einziffrige Wurzel aus einer ein- oder zweiziffrigen Zahl, eine dreiziffrige Wurzel aus einer fünf- oder sechsziffrigen Zahl u. s. w.

Theilt man folglich die Ziffern des Radicanden von rechts nach links zu zweien ab, so ist die Anzahl dieser Abtheilungen gleich der Stellenanzahl der gesuchten Quadratwurzel.

3) Es ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b) . b$, also z. B.

$$(35)^2 = 30^2 + 2 . 30 . 5 + 5^2 = 30^2 + (2 . 30 + 5) . 5 = 30^2 + 65 . 5 = 1225.$$

Umgekehrt erhält man die Quadratwurzel aus 1225 durch Zerlegung dieser Zahl in die angeführten Summanden.

§. 101. Aufgabe.

Die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Quadratzahl, z. B. aus 1225 zu ziehen.

Auflösung. Theilt man die Ziffern der Zahl 1225 von rechts nach links zu zweien ab, so erhält man zwei Abtheilungen. Die Wurzel ist folglich zweiziffrig und besteht aus Zehnern und Einern; ferner liegt sie zwischen 30 und 40, weil die in der ersten Abtheilung stehende Zahl (12) zwischen 3^2 und 4^2 liegt. Bezeichnet man die noch fehlenden Einer durch x, so ist also $30 + x$ die gesuchte Wurzel. Es ist folglich

$$1225 = (30 + x)^2 = 30^2 + 2 . 30x + x^2, \text{ oder}$$
$$1225 = 30^2 + (60 + x) . x, \text{ daher}$$
$$(60 + x) . x = 1225 - 900 = 325.$$

Da der Buchstabe x nur die Einer bezeichnet, so kann der Ausdruck $(60 + x) . x$ nicht bedeutend größer sein als 60 x, und es läßt sich also wenigstens annähernd $60x = 325$ setzen. Hieraus folgt, daß x, wenn es eine ganze Zahl bedeuten soll, höchstens gleich 5 sein kann. Setzt man versuchsweise $x = 5$, so ist

$(60 + x) . x = 65 . 5 = 325$, und 5 ist also der richtige Werth, daher $30 + 5 = 35$ die gesuchte Wurzel.

Die Rechnung läßt sich am einfachsten in nachstehender Form ausführen:

	12|25	35
	9	
6(5)	3 25	
5	3 25	
325	0	

Man zieht aus der ersten Abtheilung (12) die Wurzel, subtrahirt das Quadrat derselben (9) von 12 und zieht zum Reste 3 die Ziffern der nächsten Abtheilung (25) herunter. Statt nun nach der vorher gegebenen Auflösung 325 durch 2 . 30 = 60 zu dividiren, dividirt man 32 durch 6. Den erhaltenen Quotienten 5 schreibt man hinter den Divisor 6, multiplicirt die so entstehende Zahl 65 mit 5 und subtrahirt endlich dieses Produkt (325) von dem vorher erhaltenen Reste 325. Wäre das Produkt 65 . 5 größer als dieser Rest 325, so müßte man für x einen kleineren Werth einsetzen, also das Produkt 64 . 4 versuchsweise berechnen.

§. 102. Aufgaben.

1) Die Quadratwurzel aus einer fünf- oder sechsziffrigen Quadratzahl, z. B. aus 339889 zu ziehen.

Auflösung. Man theilt die Ziffern zu zweien ab, läßt die letzte Abtheilung (89) zunächst unberücksichtigt und zieht die Wurzel (nach §. 101) aus 3398. Man erhält den Wurzelwerth 58, und es bleibt der Rest 34. Es ist folglich

$$3398 = 58^2 + 34,$$
$$339889 = 580^2 + 3489.$$

Setzt man wiederum $339889 = (580 + x)^2$,

so ist $(580 + x)^2 = 580^2 + 3489$,

oder $580^2 + 2 \,.\, 580x + x^2 = 580^2 + 3489$,

daher $(2 \,.\, 580 + x) \,.\, x = 3489$.

Um nun x zu finden, wendet man das in §.101 angegebene Verfahren an: man dividirt 3489 durch 2 . 580 = 1160, wobei man das Resultat 3 erhält, und versucht, ob (1160 + 3) . 3 = 3489 ist. Dies ist der Fall, und die gesuchte Wurzel heißt also 583.

Die Berechnung führt man in nachstehender Form aus, welche nach dem Vorangehenden keiner weiteren Erklärung mehr bedarf.

	33|98|89	583
	25	
10(8)	8 98	
8	8 64	
116(3)	34 89	
3	34 89	

2) Die Quadratwurzel aus einer Quadratzahl mit beliebig vielen Stellen zu ziehen.

Auflösung. Bei einer sieben- oder achtziffrigen Zahl bestimmt man zunächst die Wurzel aus den fünf oder sechs ersten Stellen (nach 1) und darauf die Einer nach dem bereits öfter angegebenen Verfahren.

Bei Zahlen mit mehr als acht Stellen verfährt man in entsprechender Weise, wie sich aus der nachstehenden Berechnung der Wurzel $\sqrt{11088932416}$ leicht wird erkennen lassen.

	11088932416 | 105304
	1
2(0)(5)	1088
	1025
210(3)	6393
	6309
2106(0)(4)	842416
	842416

Anm. Die Division liefert zweimal das Resultat 0. Man schreibt alsdann die Null zu den bereits erhaltenen Stellen der Wurzel hinzu und zieht die nächsten zwei Stellen herunter.

§. 103. Aufgabe.

Die Quadratwurzel aus einer Zahl zu ziehen, welche keine Quadratzahl ist, z. B. aus 5.

Auflösung. Die gesuchte Wurzel ist keine ganze Zahl, denn sie muß zwischen 2 und 3 liegen; sie ist aber auch kein unächter Bruch, denn das Quadrat eines solchen ist wieder ein unächter Bruch. Der Werth der Wurzel kann also nur durch Näherungswerthe angegeben werden (§. 94).

Die bequemste Form zur annähernden Angabe des Wurzelwerthes ist die eines irrationalen Decimalbruches. Man verwandelt deshalb den Radicanden 5 in einen Decimalbruch und zieht die Wurzel einzeln aus dem Zähler und dem Nenner (§. 97). Damit sich der Nenner ohne Rest radiziren lasse, giebt man ihm stets eine gerade Anzahl von Stellen; der beim Radiziren des Zählers bleibende Rest wird nicht weiter berücksichtigt.

Die zunehmende Genauigkeit des Resultates bei wachsender Stellenanzahl des Decimalbruches ist leicht aus dem Folgenden zu ersehen. Es ist

$$\sqrt{5} = 2, \text{ Rest } 1;$$

$$\sqrt{\frac{500}{100}} = \frac{22}{10}, \text{ Rest } \frac{16}{100};$$

$$\sqrt{\frac{50000}{10000}} = \frac{223}{100}, \text{ Rest } \frac{271}{10000};$$

$$\sqrt{\frac{5000000}{1000000}} = \frac{2236}{1000}, \text{ Rest } \frac{304}{1000000}.$$

Die an Genauigkeit zunehmenden Werthe sind:

2; 2,2; 2,23; 2,236 u. s. w.

Man erhält dieselben, indem man dem Radicanden 5 je zwei Nullen anhängt und dann wie gewöhnlich radizirt. Das Komma im Resultate wird gesetzt, sobald man dem Radicanden die ersten Nullen hinzufügt. Die Berechnung führt man in nachstehender Form aus:

	5	2,236 ....
	4	
4(2)	100	
	84	
44(3)	1600	
	1329	
446(6)	27100	
	26796	
	304	

Anm. Zu Ende des §. 101 ist der Fall erwähnt, daß der durch Division erhaltene Näherungswerth von x zu groß sein könnte. Dieser Fall kann indessen nur bei der Berechnung der ersten Wurzelstellen eintreten, und je größer die Anzahl der bereits erhaltenen Stellen ist, desto mehr hängen die nächstfolgenden Stellen nur von den ersten Ziffern der jedesmaligen Divisoren ab und lassen sich daher durch bloße Division mit Sicherheit bestimmen. Zieht man in der vorhin abgebrochenen Berechnung der Wurzel aus 5 zum Reste 304 eine Null herunter und dividirt die Zahl 3040 auf verkürzte Art durch $2 \,.\, 2236 = 4472$, so erhält man das Resultat 0679. Dieselben Ziffern würde man erhalten haben, wenn die Berechnung der Wurzel in gewöhnlicher Art fortgesetzt worden wäre.

§. 104. Aufgabe.

Die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche, oder aus einem Decimalbruche zu ziehen.

Auflösung. Sind Zähler und Nenner Quadratzahlen, so radizirt man beide einzeln. In allen andern Fällen verwandelt man den Bruch in einen Decimalbruch mit gerader Stellenanzahl und verfährt dann wie in §. 103.

Man zieht also die Wurzel aus dem Zähler, wobei die Ziffern vom Komma an nach beiden Seiten zu zweien abgetheilt werden, und schneidet dann im Resultate durch das Komma so viel Stellen ab, als der Radicand Stellenpaare nach dem Komma gehabt hatte.

Beispiel I. Berechnung der Wurzel:

$$\sqrt{15\frac{3}{8}} = \sqrt{15{,}375000\ \ldots}$$

$$\begin{array}{lrl}
 & 15{,}375000 & |\ 3{,}921\ \ldots \\
 & 9 & \\
6(9) & 637 & \\
 & 621 & \\
78(2) & 1650 & \\
 & 1564 & \\
784(1) & 8600 & \\
 & 7841 & \\
 & 759 &
\end{array}$$

Beispiel II. Berechnung der Wurzel $\sqrt{0{,}001}$.

$$\begin{array}{lrl}
 & 0{,}0010 & |\ 0{,}0316\ \ldots \\
 & 9 & \\
6(1) & 100 & \\
 & 61 & \\
62(6) & 3900 & \\
 & 3756 & \\
 & 144 &
\end{array}$$

§. 105. Zusatz.

Die Wurzel aus einer Quadratzahl läßt sich auch dadurch finden, daß man die Zahl in ihre Faktoren zerlegt und die Wurzeln aus den Faktoren einzeln auszieht.

Da z. B. $576 = 9 \cdot 64$ ist, so ist auch

$$\sqrt{576} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{64} = 3 \cdot 8 = 24.$$

Dieses Verfahren läßt sich zuweilen auch dann mit Vortheil benutzen, wenn die Radicanden keine Quadratzahlen sind. Es ist z. B.

$$\sqrt{72} + \sqrt{50} - \sqrt{98} = 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{32} = 5{,}6569\ \ldots$$

§. 106. Zusatz.

Aus algebraischen Summen lassen sich die Quadratwurzeln berechnen, wenn diese Summen die Form $a^2 \mp 2ab + b^2$ haben (§. 97, Anm. 1).

Bei der Berechnung ordnet man die Radicanden alphabetisch und verfährt dann wie bei Zahlenausdrücken.

Beispiel. Berechnung der Wurzel

$$\sqrt{25a^2+40ab-30ac+16b^2-24bc+9c^2}.$$

$$\begin{array}{lll}
 & 25a^2+40ab-30ac+16b^2-24bc+9c^2 & \vert\; 5a+4b-3c \\
(5a)^2 = & 25a^2 & \\
\hline
10a+(4b) & 40ab-30ac+16b^2-24bc+9c^2 & \\
\quad\quad 4b & & \\
\overline{40ab+16b^2} & 40ab \quad\quad +16b^2 & \\
\hline
10a+8b-(3c) & -30ac \quad\quad -24bc+9c^2 & \\
\quad\quad -3c & & \\
\overline{-30ac-24bc+9c^2} & -30ac \quad\quad -24bc+9c^2 & \\
\hline
\end{array}$$

Anm. Das Resultat $5a+4b-3c$ bezeichnet den **absoluten** Wurzelwerth; der vollständige Werth ist $\mp(5a+4b-3c)$.

§. 107. Erklärung.

Als Hülfsmittel zur numerischen Berechnung der Kubikwurzeln ist Folgendes zu merken:

1) Aus $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ u. s. w. folgt, daß

$$\sqrt[3]{1} = 1,\ \sqrt[3]{8} = 2,\ \sqrt[3]{27} = 3,\ \sqrt[3]{64} = 4,\ \sqrt[3]{125} = 5,$$

$$\sqrt[3]{216}=6,\ \sqrt[3]{343}=7,\ \sqrt[3]{512}=8,\ \sqrt[3]{729}=9,\ \sqrt[3]{1000}=10 \text{ ist.}$$

2) Aus $1^3 = 1$, $10^3 = 1000$, $100^3 = 1000000$ u. s. folgt, daß die Kuben der einziffrigen Zahlen zwischen 1 und 1000 liegen, folglich 1, oder 2, oder 3 Stellen haben, ferner daß die Kuben der zweiziffrigen Zahlen zwischen 1000 und 1000000 liegen, folglich 4, oder 5, oder 6 Stellen haben, u. s. w. Man erhält also eine einziffrige Kubikwurzel aus einer 1—3ziffrigen, eine 3ziffrige Kubikwurzel aus einer 7—9ziffrigen Zahl u. s. w. Theilt man die Ziffern des Radicanden von rechts nach links zu dreien ab, so ist folglich die Anzahl dieser Abtheilungen gleich der Stellenanzahl der gesuchten Kubikwurzel.

3) Es ist $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

§. 108. Aufgabe.

Die Kubikwurzel aus der Kubikzahl 14348907 zu ziehen.

Auflösung. Man theilt die Ziffern der Zahl 14.348,907 von rechts nach links zu dreien ab, läßt die Ziffern der letzten Abtheilung (907) zunächst unberücksichtigt und zieht die Wurzel nur aus der Zahl 14348. (Vergl. §. 102.) Die Kubikwurzel aus 14348 ist zweiziffrig (§. 107); ferner muß sie, da 8 der größte in 14 enthaltene Kubus ist, zwischen 20 und 30 liegen. Bezeichnet man daher die gesuchte Wurzel durch $20 + x$, so ist

$$(20 + x)^3 = 14348, \text{ oder}$$
$$20^3 + 3 \,.\, 20^2x + 3 \,.\, 20x^2 + x^3 = 14348, \text{ daher}$$
$$3 \,.\, 20^2x + 3 \,.\, 20x^2 + x^3 = 6348.$$

Da $3 \,.\, 20^2 \,.\, x$ vorwiegend groß gegenüber den anderen Summanden ist, so kann man annähernd $6348 = 3 \,.\, 20^2 \,.\, x = 120x$ setzen, woraus sich ergiebt, daß x höchstens gleich 5 sein kann. Setzt man versuchsweise $x = 5$, so findet man, daß dieser Werth zu groß ist; setzt man $x = 4$, so ist

$$3 \,.\, 20^2 \,.\, x = 4800,$$
$$3 \,.\, 20 \,.\, x^2 = 960,$$
$$x^3 = 64,$$
$$\text{daher die Summe} = 5824.$$

Subtrahirt man diese Zahl von 6348, so bleibt der Rest 524, und es ist also

$$14348 = 24^3 + 524, \text{ daher}$$
$$14348907 = 240^3 + 524907.$$

Bezeichnet man den genaueren Wurzelwerth durch $240 + x$, so ist

$$(240 + x)^3 = 240^3 + 524907, \text{ oder}$$
$$240^3 + 3 \,.\, 240^2x + 3 \,.\, 240x^2 + x^3 = 240^3 + 524907, \text{ oder}$$
$$3 \,.\, 240^2x + 3 \,.\, 240x^2 + x^3 = 524907.$$

Setzt man in dieser Gleichung annähernd (wie oben)

$$524907 = 3 \,.\, 240^2x = 172800x,$$

so kann x höchstens gleich 3 sein. Für diesen Werth ist nun

$$3 \,.\, 240^2x = 518400$$
$$3 \,.\, 240x^2 = 6480$$
$$x^3 = 27,$$
$$\text{daher die Summe} = 524907.$$

Der Werth 3 genügt also der Gleichung vollständig, und es ist folglich $(240 + 3) = 243$ die gesuchte Wurzel.

§. 109. Zusatz.

Der Abkürzung wegen kann man bei den angegebenen Berechnungen sämmtliche Nullen weglassen, muß aber dann bei Berechnung des Ausdrucks $3 \,.\, 20^2x + 3 \,.\, 20x^2 + x^3$ und ähnlicher Ausdrücke jedes folgende Glied um eine Stelle nach rechts ausrücken. Man rechnet alsdann nach folgender Form, in welcher a die bereits gefundenen Werthe bezeichnet.

	14|348|907	$a = 2$	$3a^2x = 48$
			$3ax^2 = 96$
$a^3 =$	8		$x^3 = 64$
			5824
$3a^2 = 12$	6348	$x = 4$	
	5824	$a = 24$	$3a^2x = 5184$
			$3ax^2 = 648$
$3a^2 = 1728$	524907	$x = 3$	$x^3 = 27$
	524907	$a = 243$	524907

Anm. Soll die Kubikwurzel aus einer Zahl mit beliebig vielen Stellen gezogen werden, so hat man das angegebene Verfahren zu wiederholen.

§. 110. Zusatz.

Aus einer Zahl, welche keine Kubikzahl ist, läßt sich die dritte Wurzel nur annähernd berechnen. Man verfährt alsdann in ähnlicher Art, wie bei der annähernden Berechnung der Quadratwurzeln (§. 103), hängt indessen jedesmal drei Nullen an.

Bei der Berechnung einer derartigen Wurzel auf eine größere Anzahl von Decimalstellen wendet man das Verfahren der verkürzten Division an. (Vergl. §. 103, Anm.) Man zieht eine Null zum Reste herunter und dividirt durch $3a^2$, darf jedoch nicht alle so erhaltenen Stellen benutzen.

§. 111. Zusatz.

Die dritte Wurzel aus einer Kubikzahl läßt sich zuweilen sehr leicht berechnen, wenn man die Faktoren der letzteren kennt. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{13824} = \sqrt[3]{8 \,.\, 8 \,.\, 8 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3} = 8 \,.\, 3 = 24.$$

§. 112. Zusatz.

Außer den 2ten und 3ten Wurzeln lassen sich auch diejenigen Wurzeln mit Hülfe des Vorangehenden numerisch berechnen, deren Wurzelexponenten

aus den Zahlen 2 und 3 als Faktoren zusammengesetzt sind (§. 98, 1), wie z. B. die 4^{ten}, 6^{ten}, 8^{ten}, 9^{ten} u. s. w. Wurzeln. Die 5^{ten}, 7^{ten} u. a. Wurzeln lassen sich nicht aus den 2^{ten} und 3^{ten} Wurzeln ableiten (§. 98, 5), würden jedoch in einer ähnlichen Art berechnet werden können. Zur Bestimmung der höheren Wurzeln bedient man sich indessen anderer Mittel, wie in einem späteren Capitel gezeigt werden wird.

Anm. Ueber die Berechnung der Kubikwurzeln aus algebraischen Summen vergleiche §. 106.

Aufgaben.

I. Die Quadratwurzel zu berechnen aus:

1) 6724;
2) 7569;
3) 8649;
4) 9801;
5) 12321;
6) 14161;
7) 39601;
8) 78961;
9) 121801;
10) 275625;
11) 301401;
12) 417316;
13) 715716;
14) 835396;
15) 900601;
16) 952576;
17) 996004;
18) 20857489;
19) 152967424;
20) 101485476;
21) 748843225;
22) 18720806976;
23) 2726;
24) 2780;
25) 14;
26) 19;
27) 27;
28) 7;
29) 43;
30) 50;
31) 127;
32) 82;
33) 41,85;
34) 47,80;
35) 61,85;
36) 22,91;
37) 0,31;
38) 0,4;
39) 0,9;
40) 0,03;
41) 0,0027;
42) 0,0005;
43) 0,049;
44) 0,000068;
45) 0,4444....;
46) 0,69444....;
47) $\frac{5}{7}$;
48) $\frac{6}{13}$;
49) $\frac{5}{24}$;
50) $\frac{7}{129}$;
51) $\frac{11}{995}$;
52) $\frac{3}{1729}$;
53) $3\frac{2}{3}$;
54) $5\frac{7}{9}$;
55) $21\frac{11}{13}$;
56) $12\frac{21}{25}$;
57) $7\frac{13}{15}$;
58) $131\frac{7}{11}$;

59) $9a^2 + 24ab + 48ac + 16b^2 + 64bc + 64c^2$;

60) $16a^2 - 48ab - 24ac + 56ad + 36b^2 + 36bc - 84bd + 9c^2 - 42cd + 49d^2$;

61) $9a^2c^2 + 24abc + 6ac^2d + 48ac + 16b^2 + 8bcd + 64b + c^2d^2 + 16cd + 64$;

62) $9a^2d^2 - 24abcd^2 + 36ad^2 + 16b^2c^2d^2 - 48bcd^2 + 36d^2$;

63) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$;

64) $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$;

65) $\frac{4}{9}a^2 + \frac{16}{15}ab + \frac{16}{25}b^2$;

66) $\frac{1}{9}x^2y^2 + \frac{1}{3}xzy^2 - \frac{1}{6}x^2yz + \frac{1}{4}y^2z^2 - \frac{1}{4}xyz^2 + \frac{1}{16}z^2x^2$.

II. Die Kubikwurzeln zu berechnen (bei den ersten 10 Aufgaben durch Zerlegung der Zahlen in ihre Faktoren) aus:

67) 32768;
68) 110592;
69) 91125;
70) 157464;
71) 373248;
72) 970299;
73) 2097152;
74) 1771561;
75) 4741632;
76) 788889024;
77) 4301;
78) 51;
79) 2966;
80) 2,976;
81) 0,056;
82) 0,001581;
83) 0,08 ....;
84) $\frac{5}{11}$;
85) $\frac{7}{17}$;
86) $\frac{5}{48}$;
87) $8\frac{1}{19}$;
88) $27\frac{1}{4}$;
89) 0,296296296 ....;
90) 0,037037037 .....

III. Folgende Wurzelausdrücke zu berechnen:

91) † $\sqrt[4]{775}$; 92) † $\sqrt[4]{4085}$; 93) † $\sqrt[6]{45}$; 94) † $\sqrt[6]{194}$;

95) † $\sqrt[8]{29\frac{1}{2}}$; 96) † $\sqrt[8]{8\frac{17}{20}}$. 97) † $\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

98) † $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; 99) † $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; 100) $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

Auflösungen.

1) 82; 2) 87; 3) 93; 4) 99; 5) 111; 6) 119; 7) 199; 8) 281; 9) 349; 10) 525; 11) 549; 12) 646; 13) 846; 14) 914; 15) 949; 16) 976; 17) 998; 18) 4567; 19) 12368; 20) 10074; 21) 27365; 22) 136824; 23) 52,211109 ....; 24) 52,725705 ....; 25) 3,741657 ....; 26) 4,358898 .....; 27) 5,196252 .....; 28) 2,645751 ....;

29) 6,557438....; **30)** 7,071067....; **31)** 11,269427....;
32) 9,055385....; **33)** 6,469157....; **34)** 6,913754.....;
35) 7,864477....; **36)** 4,78643.....; **37)** 0,556776.....;
38) 0,632455....; **39)** 0,948683....; **40)** 0,173205.....;
41) 0,051961....; **42)** 0,022360....; **43)** 0,221359.....;
44) 0,008246....; **45)** $\frac{2}{3}$; **46)** $\frac{5}{6}$; **47)** 0,84515....;
48) 0,67936....; **49)** 0,45643....; **50)** 0,23294....; **51)** 0,10514....;
52) 0,041654....; **53)** 1,91485....; **54)** 2,40370....;
55) 4,67399....; **56)** 3,5833....; **57)** 2,8047....; **58)** 11,473....;
59) $3a+4b+8c$; **60)** $4a-6b-3c+7d$; **61)** $3ac+4b+cd+8$;
62) $3ad-4bcd+6d$; **63)** $x^2-2xy+y^2$; **64)** $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
65) $\frac{2}{3}a+\frac{4}{5}b$; **66)** $\frac{1}{3}xy+\frac{1}{2}yz-\frac{1}{4}xz$; **67)** 32; **68)** 48; **69)** 45;
70) 54; **71)** 72; **72)** 99; **73)** 128; **74)** 121; **75)** 168; **76)** 924;
77) 16,26259....; **78)** 3,70842....; **79)** 14,3678....; **80)** 1,43839....;
81) 0,38258....; **82)** 0,116495....; **83)** 0,430886....; **84)** 0,76888....;
85) 0,743960....; **86)** 0,47051....; **87)** 2,0043....; **88)** 3,0092....;
89) $\frac{2}{3}$; **90)** $\frac{1}{3}$; **91)** 5,2762....; **92)** 7,9946....; **93)** 1,8859....;
94) 2,4060....; **95)** 1,5266....; **96)** 1,3133....; **97)** 0,765366....;
98) 0,390180....; **99)** 0,517638....; **100)** 0,261052.....

Viertes Capitel.

Von den allgemeinen Ungleichungen und von den Proportionen.

A. Von den allgemeinen Ungleichungen.

§. 113. Erklärung.

Die Ungleichung $a > b$ heißt allgemein, wenn a und b reelle Zahlen sind, und bedeutet, daß man zu b eine positive (ganze oder gebrochene) Zahl hinzuaddiren müsse, um a zu erhalten, daß also $a = b + x$ ist.

Ist umgekehrt $a = b + x$, und bedeutet x eine positive Zahl, so ist auch $a > b$. (Vergl. §§. 7 und 44).

Anm. In den nächsten §§. sollen unter den Ausdrücken x und y positive, unter den übrigen aber reelle Zahlen verstanden werden.

§. 114. Lehrsätze.

1) Ist $a > b$ und $b = c$, so ist $a > c$.
2) Ist $a > b$ und $b > c$, " " $a > c$.
3) Ist $a < b$ und $b < c$, " " $a < c$.
4) Ist $a < b$ und $b = c$, " " $a < c$.
5) Ist $a > b$, so ist $a + m > b + m$.
6) " " " " $a - m > b - m$.
7) " " " " $m - a < m - b$.

Beweis zu 1. Aus $a > b$ folgt, daß $a = b + x$,
und aus $b = c$ folgt, daß $b + x = c + x$ ist.
Es ist daher $a = c + x$, oder $a > c$.

Beweise zu 2—4. Dieselben werden in ähnlicher Art geführt.

Beweis zu 5. Aus $a > b$ folgt, daß $a = b + x$, und hieraus,
daß $a + m = b + x + m$,
oder daß $a + m > b + m$ ist.

Beweise zu 6—7. Dieselben werden in ähnlicher Art geführt.

§. 115. Lehrsatz.

Ist $a > b$, so ist $-a < -b$.

Beweis. Ist $a > b$, so ist $0 - a < 0 - b$ (§. 114, 7),
oder $-a < -b$.

§. 116. Lehrsätze.

1) Ist $a > b$ und $c > d$, so ist $a + c > b + d$.
2) Ist $a > b$ und $c > d$, " " $a - d > b - c$.
3) Ist $a + b = c + d$ und $a > c$, so ist $b < d$.
4) Ist $a - b = c - d$ und $a > c$, " " $b > d$.

Beweis zu 1. Es ist $a = b + x$,

$$c = d + y,$$

also $(a + c) = (b + d) + (x + y)$,

oder $a + c > b + d$.

Beweise zu 2—4. Dieselben werden in ähnlicher Art geführt.

§. 117. Zusatz.

Sind a, b, c reelle Zahlen, so folgt aus $a = b + c$ nicht nothwendig, daß $a > b$, oder daß $a > c$ ist. Alsdann ist nämlich

1) $a > b$ und $a > c$, wenn a, b und c positiv sind (§. 113);
2) $a < b$ und $a < c$, wenn a, b und c negativ sind (§. 115);
3) $a > b$ und $a < c$, wenn a u. b negativ sind, c positiv ist (§. 113);
4) $a < b$ und $a > c$, wenn a u. b positiv sind, c negativ ist (§. 115).

§. 118. Lehrsätze.

Ist $a > b$, ferner m eine positive Zahl, so ist

$$1)\ am > bm;\quad 2)\ \frac{a}{m} > \frac{b}{m};\quad 3)\ \frac{m}{a} < \frac{m}{b}.$$

Beweise zu 1 und 2. Dieselben ergeben sich, wenn man $a = b + x$ setzt.

Beweis zu 3. Es ist $\frac{m}{a} = \frac{mb}{ab}$, $\frac{m}{b} = \frac{ma}{ba}$.

Da nun $b < a$, folglich $mb < ma$ ist, so ist (nach 2)

$$\frac{mb}{ab} < \frac{ma}{ab},\ \text{oder}\ \frac{m}{a} < \frac{m}{b}.$$

§. 119. Lehrsätze.

Ist $a > b$, ferner $m = - n$ eine negative Zahl, so ist

$$1)\ am < bm;\quad 2)\ \frac{a}{m} < \frac{b}{m};\quad 3)\ \frac{m}{a} > \frac{m}{b}.$$

Beweis zu 1. Ist $a > b$, so ist $a . (+ n) > b . (+ n)$ (§. 118, 1);

folglich ist $0 - a . (+ n) < 0 - b . (+ n)$ (§. 115),

oder $a . (- n) < b . (- n)$,

oder $am < bm$.

Beweise zu 2 und 3. Dieselben werden in ähnlicher Art geführt.

Anm. Die Sätze der §§. 118 und 119 sind nicht mehr richtig, wenn $m = 0$ ist.

B. Von den Proportionen.

§. 120. Erklärung.

Eine Gleichung zwischen zwei Differenzen, wie

$$a - b = c - d,$$

heißt eine arithmetische, eine Gleichung zwischen zwei Quotienten, wie

$$a : b = c : d,$$

heißt eine geometrische Proportion. In beiden Fällen heißen a und d die äußeren, b und c die inneren Glieder.

Sind die inneren Glieder einer Proportion einander gleich, ist z. B.

$$a - b = b - c, \text{ oder}$$

$$a : b = b : c,$$

so heißt die Proportion stetig. Man nennt alsdann b die mittlere arithmetische (geometrische) Proportionale, oder auch das arithmetische (geometrische) Mittel zwischen a und c.

§. 121. Zusatz.

1) Ist $a - b = c - d$, so ist $a + d = b + c$ (§. 12, 4).

2) Ist $a : b = c : d$, so ist $a . d = b . c$ (§. 40, 4).

In einer arithmetischen Progression ist die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der inneren, in einer geometrischen ist es das Produkt.

Anm. Aus den Regeln des Dividirens, oder aus 2) ergiebt sich die Richtigkeit folgender Sätze:

Ist $a : b = c : d$, so ist

1) $am : bm = c : d$;

2) $am : b = cm : d$;

3) $am : bm = cn : dn$;

4) $am : bn = cm : dn$;

5) $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$;

6) $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$;

u. s. w.

§. 122. Zusatz.

Ist $a + d = b + c$, oder ist $a . d = b . c$, so läßt sich aus diesen vier Zahlen eine arithmetische (geometrische) Proportion bilden. Je nachdem man in der ersten Gleichung auf beiden Seiten $(d + b)$, oder $(d + c)$, oder $(a + b)$, oder $(a + c)$ subtrahirt, oder in der zweiten beide Seiten durch db, oder dc, oder ab, oder ac dividirt, erhält man:

1) $a - b = c - d$; 5) $a : b = c : d$;
2) $a - c = b - d$; 6) $a : c = b : d$;
3) $d - b = c - a$; 7) $d : b = c : a$;
4) $d - c = b - a$; 8) $d : c = b : a$.

Man kann also in jeder Proportion die inneren Glieder vertauschen, ebenso die äußeren, und kann jede Seite in sich umkehren.

§. 123. Zusatz.

Jedes Glied einer Proportion läßt sich durch die übrigen Glieder ausdrücken.

1) Aus $a - x = c - d$ folgt, daß
$$x + c = a + d,$$
$$x = a + d - c \text{ ist.}$$

2) Aus $a : x = c : d$ folgt, daß
$$xc = ad,$$
$$x = \frac{ad}{c} \text{ ist.}$$

3) Aus $a - x = x - b$ folgt, daß
$$2x = a + b,$$
$$x = \frac{a + b}{2} \text{ ist.}$$

4) Aus $a : x = x : b$ folgt, daß
$$x^2 = ab,$$
$$x = \sqrt{ab} \text{ ist.}$$

§. 124. Lehrsätze.

1) Ist $a : b = c : d$, so ist $(a \mp b) : b = (c \mp d) : d$.
2) Ist $a : b = c : d$, so ist $(a \mp mb) : b = (c \mp md) : d$.
3) Ist $a : b = c : d$, so ist $(a+b):(a-b) = (c+d) : (c-d)$.
4) Ist $a : b = c : d$, so ist $(am \mp bn) : (av \mp bw) =$
$(cm \mp dn) : (cv \mp dw)$.
5) Ist $a : b = c : d = e : f$, so ist
$$(a + c + e) : (b + d + f) = a : b = c : d = e : f.$$

6) Ist $a : b = m$, $b : c = n$, $c : d = v$, $d : e = w$, so ist

$$a : e = m . n . v . w.$$

Beweis zu 1. Ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $\frac{a}{b} \mp 1 = \frac{c}{d} \mp 1$, oder

$$\frac{a \mp b}{b} = \frac{c \mp d}{d}.$$

Beweis zu 2. Er wird in ähnlicher Art geführt.

Beweis zu 3. Ist $a : b = c : d$, so ist (nach 1)

$$(a + b) : b = (c + d) : d, \text{ ferner}$$

$$(a - b) : b = (c - d) : d, \text{ folglich}$$

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Beweis zu 4. Er folgt aus 3 und aus §. 121, 4.

Beweis zu 5. Ist $a : b = c : d$, so ist

$$(a + b) : (c + d) = b : d = e : f.$$

Ist nun $(a + b) : (c + d) = e : f$, oder

$$(a + b) : e = (c + d) : f, \text{ so ist auch}$$

$$(a + b + e) : e = (c + d + f) : f, \text{ oder}$$

$$(a + b + e) : (c + d + f) = e : f = a : b = c : d.$$

Beweis zu 6. Es ist $m . n . v . w = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} = \frac{a}{e}$.

Anm. zu 5. Statt der Form $a : b = c : d = e : f$ u. s. w. schreibt man auch $a : c : e = b : d : f$ und nennt dies eine zusammenhängende Proportion. In einer solchen stehen zwei beliebige Zahlen der linken Seite in demselben Verhältniß, wie die an gleicher Stelle befindlichen Zahlen der rechten Seite.

§. 125. Erklärung.

Zwei Zahlen sind commensurabel oder haben ein rationales Verhältniß, wenn sich ihr Verhältniß durch das zweier ganzen Zahlen darstellen läßt. Commensurabel sind alle ganzen Zahlen, alle rationalen und alle periodischen Decimalbrüche; irrationale Zahlen sind nur dann commensurabel, wenn jede ein Vielfaches ein und derselben Irrationalzahl ist, wie z. B. $3\sqrt{2}$ und $5\sqrt{2}$.

Zwei Zahlen sind incommensurabel oder haben ein irrationales Verhältniß, wenn sich ihr Verhältniß nicht durch das zweier ganzen Zahlen darstellen läßt. Es ist alsdann mindestens eine derselben irrational. Das

Verhältniß zweier incommensurabelen Zahlen bestimmt man durch Näherungswerthe, indem man zwei möglichst wenig von einander verschiedene Gränzwerthe angiebt, zwischen denen es liegen muß. So liegt z. B. das Verhältniß $\sqrt{6} : 3$ zwischen den Gränzen (2,4494 : 3) und (2,4495 : 3); ersteres ist zu klein, letzteres zu groß. Diese Gränzen lassen sich jedoch durch Berechnung einer größeren Anzahl von Stellen für $\sqrt{6}$ immer näher an einander legen. Zwei Paare von incommensurabelen Zahlen haben dasselbe Verhältniß, stehen also in Proportion, wenn beide Verhältnisse immer zwischen denselben Gränzen liegen, und zugleich der Unterschied zwischen den Gränzen verschwindend klein werden kann.

§. 126. Erklärung.

Eine Proportion, deren Glieder benannte Zahlen oder Größen sind, heißt eine Größenproportion.

Die arithmetische Größenproportion hat die Form

$$aA - bA = cA - dA,$$

während sich für die geometrische folgende zwei Formen ergeben:

$$aA : bA = cA : dA,$$

$$aA : bA = cB : dB. \quad \text{(Vergl. §. 84.)}$$

Eine Größenproportion kann nur richtig sein, wenn die in ihr vorkommenden unbenannten Zahlen eine richtige Zahlenproportion bilden. Hierin liegt ein Mittel, ein unbekanntes Glied aus den übrigen bekannten zu bestimmen.

Anm. Die in §. 124 aufgestellten Sätze gelten auch für Größenproportionen. (Vergl. §. 84.)

§. 127. Zusatz.

Eine ausgedehnte Anwendung findet die Lehre von den geometrischen Proportionen bei den Aufgaben des bürgerlichen Rechnens, bei der Regel de tri, de quinque u. s. w. (§. 124, 6.)

Die Proportionen entstehen dadurch, daß sich verschiedene Mengen derselben Waare wie ihre Preise verhalten müssen, oder bei einer gleichmäßigen Bewegung die zurückgelegten Wege wie die Zeiten u. s. w. Entspricht der Zunahme einer Größe jedesmal die Abnahme einer zweiten, wie z. B. zu einer Arbeit desto mehr Arbeiter gehören, je kürzer die Arbeitszeit ist, so nennt man diese Größen umgekehrt proportional. Alsdann ist

$$A : A' = B' : B, \text{ oder } A : B = \frac{1}{A'} : \frac{1}{B'}.$$

§. 128. Erklärung.

Stehen vier Zahlen (Größen) in solcher Beziehung, daß die Differenz der ersten und zweiten sich zur Differenz der dritten und vierten verhält wie die erste zur vierten, ist also

$(a - b) : (c - d) = a : d$, oder z. B. $(8 - 2) : (7 - 4) = 8 : 4$,

so bilden diese vier Zahlen (Größen) a, b, c, d eine **harmonische Proportion**.

Ist die zweite Zahl (Größe) gleich der dritten, ist also

$(a - b) : (b - c) = a : c$, oder z. B. $(6 - 4) : (4 - 3) = 6 : 3$,

so heißt die Proportion **stetig**, und b heißt die **mittlere harmonische Proportionale** zwischen a und c.

Ist $(a - b) : (b - c) = a : c$, so ist

$$1)\ c = \frac{ab}{2a - b},$$

$$2)\ b = \frac{2ac}{a + c}.$$

Anm. 1. Eine besondere Anwendung finden die stetigen harmonischen Proportionen in der Geometrie.

Anm. 2. Zwischen zwei Zahlen a und c hat man ein arithmetisches, ein geometrisches und ein harmonisches Mittel. Diese Mittel stehen in einer solchen Beziehung, daß das geometrische Mittel zwischen a und c zugleich das geometrische Mittel zwischen dem arithmetischen und harmonischen, daß also

$$\frac{a + c}{2} : \sqrt{ac} = \sqrt{ac} : \frac{2ac}{a + c}$$

ist, was sich unmittelbar aus der Multiplication der inneren und äußeren Glieder dieser Proportion ergiebt.

Anm. 3. Drei Brüche von der Form $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b + d}$, $\frac{a}{b + 2d}$ bilden immer eine stetige harmonische Proportion. In der Reihe $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b + d}$, $\frac{a}{b + 2d}$, $\frac{a}{b + 3d}$ u. s. w. bilden also je drei aufeinanderfolgende Glieder eine stetige harmonische Proportion, und man nennt deshalb auch die Reihe eine harmonische. Das einfachste Beispiel einer solchen Reihe ist die folgende: $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. Die ersten Glieder dieser Reihe bezeichnen in der Physik die Verhältnisse der Saitenlängen für harmonirende Töne, und dies hat Veranlassung gegeben, die erwähnten Reihen und Proportionen harmonische zu nennen.

Fünftes Capitel.

Von den algebraischen Gleichungen.

§. 129. Erklärung.

Eine Gleichung ist analytisch, wenn sich die eine Seite derselben aus der anderen nach den Regeln des Rechnens ableiten läßt, die vorkommenden Buchstaben also eine ganz allgemeine Bedeutung haben; sie ist algebraisch oder ist eine Bestimmungsgleichung, wenn sie nur für bestimmte Werthe der in ihr vorkommenden Buchstaben richtig ist, d. h. zu einer analytischen Gleichung wird. Es ist daher $(a + b) - c = (a - c) + b$ eine analytische, hingegen $a + 2 = 5$ eine algebraische Gleichung, und letztere wird zu einer analytischen, wenn man $a = 3$ setzt.

Eine algebraische Gleichung wird nach einem der in ihr vorkommenden Buchstaben, z. B. nach x, aufgelöst, wenn man die Werthe von x bestimmt, welche die Gleichung zu einer analytischen machen oder ihr genügen, und jeder derartige Werth heißt ein Resultat der Gleichung. Diejenigen Ausdrücke, nach welchen eine Gleichung gelöst werden soll, nennt man die Unbekannten und bezeichnet sie meistens durch die letzten Buchstaben des Alphabets (x, y, z).

Anm. Unter der einfachen Bezeichnung „Gleichung" soll von jetzt an eine algebraische Gleichung verstanden werden.

§. 130. Erklärung.

Unter dem Worte Algebra versteht man die Kunst, Aufgaben durch Gleichungen aufzulösen. Dieselbe verlangt nicht nur eine Kenntniß der Regeln, nach welchen eine Gleichung gelöst wird, sondern auch die Fähigkeit, eine in Worten gegebene Aufgabe in die Form einer Gleichung zu bringen.

Behandelt eine Aufgabe nur Beziehungen zwischen unbenannten Zahlen, so führt man, um eine Gleichung zu erhalten, die in der Aufgabe vorgeschriebenen Rechnungen der Reihe nach aus, indem man die unbekannten Zahlen, welche gesucht werden sollen, durch x, y u. s. w. bezeichnet.

Behandelt aber eine Aufgabe Beziehungen zwischen Größen, so sind diese Beziehungen überhaupt erst durch Verbindungen von unbenannten Zahlen darzustellen.

Erhält man alsdann für die unbekannte Größe ein negatives Resultat, so ist dies, streng genommen, unbrauchbar, weil eine Größe nie negativ sein kann, jedoch läßt es sich häufig in anderer Art benutzen. Die betreffende Gleichung kann nämlich der Art sein, daß sie dasselbe Resultat mit positivem

Vorzeichen liefern würde, wenn man die Unbekannte x überall mit dem entgegengesetzten Vorzeichen verbände. Diese umgeänderte Gleichung würde zwar der gestellten Aufgabe nicht mehr entsprechen, hingegen einer ähnlichen Aufgabe, in welcher die Unbekannte nur eine andere Beziehung zu den übrigen Größen hätte. Alsdann würde also das gefundene negative Resultat für die abgeänderte Aufgabe zu benutzen sein. Derartige Abänderungen lassen sich aber meistens leicht treffen, weil die Unbekannte x gewöhnlich eine zweifache Beziehung zu den übrigen Größen der Aufgabe haben kann. Es kann z. B. x einen unbekannten Gewinn (Verlust) bezeichnen, oder einen unbekannten verflossenen (zukünftigen) Zeitraum, eine unbekannte Verlängerung (Verkürzung) einer Linie, eine unbekannte Beschleunigung (Verzögerung) u. s. w. In den meisten Fällen wird man daher keinen Fehler begehen, wenn man unter einem negativen Resultate die entgegengesetzte Größe versteht, z. B. unter — a Thlr. Gewinn + a Thlr. Verlust, jedoch deutet das negative Resultat nur auf die Möglichkeit einer ähnlichen Aufgabe hin, und man hat sich folglich in den einzelnen Fällen erst davon zu überzeugen, ob es wirklich auch eine derartige ähnliche Aufgabe giebt.

Anm. Das Wort Algebra ist arabischen Ursprungs. Die älteren Mathematiker gebrauchten es zuweilen in der Verbindung mit dem Worte Almukabala und übersetzten dies durch restauratio et oppositio. Aus dem Worte cosa, welches die unbekannte Zahl bezeichnet, ist für Algebra auch die Bezeichnung Regola de la cosa, oder Regel Coß, oder die Coß entstanden. Eine fernere Benennung war Regula rei et census, worin res die unbekannte Zahl, census das Quadrat einer Zahl bedeutet.

§. 131. Erklärung.

Eine Gleichung heißt aus einer anderen **richtig abgeleitet, wenn beide dieselben Resultate haben.**

Die Ableitung beruht auf der Benutzung folgender Grundsätze:

Es ist $a = b$, wenn

$$1)\ a \mp m = b \mp m,\quad 2)\ a \cdot m = b \cdot m,\quad 3)\ a : m = b : m,$$

$$4)\ a^m = b^m,\quad 5)\ \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}\ \text{ist.}$$

Hierbei darf indessen nicht übersehen werden, daß in 2) und 3) m von Null verschieden sein muß (§. 46), und daß in 4) a und b absolute Zahlen bedeuten (§. 95).

Mit Hülfe dieser Sätze lassen sich die verschiedenartigsten Gleichungen auf einige wenige Formen zurückführen, welche sich durch Einfachheit und Uebersichtlichkeit auszeichnen. Diese Formen nennt man die **geordneten.**

§. 132. Zusatz.

Aus vorigem §. ergiebt sich, unter Berücksichtigung der angeführten Beschränkungen, folgende Regel:

Wenn die Seiten einer Gleichung die Form von algebraischen Summen haben, so kann man ein beliebiges Glied der einen Seite weglassen und mit verändertem Vorzeichen auf die andere Seite setzen (transponiren); auf beiden Seiten ist alsdann Gleiches addirt, oder subtrahirt worden. Aus demselben Grunde kann man auch die Vorzeichen sämmtlicher Glieder ändern. Ferner kann man beide Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl multipliciren oder potenziren, oder durch dieselbe Zahl dividiren oder radiziren.

Die in vorigem §. angeführten Beschränkungen sind in folgenden Fällen von Einfluß:

1) Bezeichnet M einen von x abhängigen Ausdruck, so folgt aus der Gleichung $A . M = B . M$, daß entweder $A = B$, oder daß $M = 0$ ist. Würde man nun aus $A . M = B . M$ die neue Gleichung $A = B$ ableiten, so würde diese entweder völlig falsch sein, oder würde eine geringere Anzahl von Lösungen haben als erstere. Es genügen z. B. der Gleichung $x(x - 3) = 4(x - 3)$ die Werthe 4 und 3, während die abgeleitete Gleichung $x = 4$ nur die eine Lösung 4 hat; der Gleichung $6(x - 5) = 4(x - 5)$ genügt der Werth 5, während die abgeleitete Gleichung $6 = 4$ falsch ist.

Dividirt man also beide Seiten einer Gleichung durch einen Ausdruck M, so ist die neue Gleichung nur dann richtig abgeleitet, wenn M von x unabhängig ist und daher niemals den Werth Null annehmen kann.

2) Bezeichnet M einen von x abhängigen Ausdruck, durch den sich A nicht ohne Rest theilen läßt, so folgt aus $\frac{A}{M} = B$ nothwendig, daß $A = MB$ ist (§. 43). In diesem Falle ist also die neue Gleichung richtig abgeleitet. Wenn sich indessen A durch M ohne Rest theilen läßt, z. B. $A = MC$ ist, so darf aus $\frac{MC}{M} = B$ nur abgeleitet werden, daß $C = B$, nicht aber, daß $MC = MB$ ist. Letztere Gleichung würde unter ihren Lösungen auch diejenigen enthalten, welche der Gleichung $M = 0$ genügen, und welche folglich, statt x in $\frac{A}{M}$ eingesetzt, den Ausdruck $\frac{0}{0}$ hervorbringen.

Kommt also der Ausdruck M als Nenner vor, so darf man die ganze Gleichung nur dann mit demselben multipliciren, wenn er sich nicht durch Reduction entfernen läßt.

3) Bezeichnen a und b reelle Zahlen, und bedeutet m eine ungerade Zahl, so folgt aus $a^m = b^m$, daß $a = b$ ist; bedeutet aber m eine gerade Zahl, so folgt aus $a^m = b^m$, daß $a = \mp b$ ist. (Vergl. §. 89, 3 u. §. 99.)

§. 133. Erklärung.

Die algebraischen Gleichungen werden eingetheilt in Gleichungen mit einer, mit zwei, drei u. s. w. Unbekannten.

Ferner werden sie eingetheilt in transcendente Gleichungen und in algebraische Gleichungen im engeren Sinne. Die ersteren unterscheiden sich dadurch von den letzteren, daß in ihnen die unbekannten Zahlen Exponenten von Potenzen oder Wurzeln sind.

Die algebraischen Gleichungen (im engeren Sinne) zerfallen in Gleichungen des ersten, zweiten, dritten u. s. w. Grades, je nachdem die geordnete Form nur die ersten, oder auch die zweiten, oder dritten u. s. w. Potenzen einer Unbekannten, oder Produkte aus einer entsprechenden Anzahl von Unbekannten enthält. Eine algebraische Gleichung mit einer Unbekannten hat die geordnete Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = 0.$$

Hierin bezeichnen a, b, c, d ... Ausdrücke, die von x unabhängig sind, und heißen Coefficienten der betreffenden Glieder.

A. Von den Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. 134. Aufgabe.

Die geordnete Gleichung $ax = b$ nach x aufzulösen.

Auflösung. Dividirt man beide Seiten der Gleichung durch a, so erhält man die Lösung

$$x = \frac{b}{a}.$$

Anm. Das Resultat $\frac{b}{a}$ kann (nach §. 47) nur einen Werth haben, wenn nicht etwa $a = 0$ ist. In diesem Falle würde sich Folgendes ergeben:

1) Ist $0 \,.\, x = b$, und bezeichnet b eine positive oder negative Zahl, so giebt es keinen Ausdruck, der, statt x gesetzt, der Gleichung genügte.

2) Ist $0 \,.\, x = 0$, so kann x jeden nur möglichen Werth haben.

§. 135. Zusatz.

Um eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten auf die geordnete Form $ax = b$ zu bringen, verfährt man folgendermaßen:

1) Enthält die Gleichung keine Quotienten und Wurzeln, so lassen sich beide Seiten leicht auf die Form der algebraischen Summen mit einfachen Gliedern bringen. Alsdann transponirt man die einzelnen Glieder so, daß sämmtliche Glieder, welche den Faktor x enthalten, auf der einen Seite stehen, die übrigen auf der andern. Durch Addition oder Subtraction der einzelnen Glieder erhält man schließlich die Form $ax = b$.

2) Enthält eine Gleichung auch Quotienten, aber keine Wurzeln, so entfernt man die Nenner, indem man auf beiden Seiten sämmtliche Glieder mit dem Generalnenner multiplicirt. Besteht der Zähler eines Bruches aus mehreren Gliedern, so müssen dieselben in Klammern geschlossen werden, sobald der Nenner wegfällt.

3) Steht die Unbekannte unter dem Wurzelzeichen, so kann man eine einzelne Wurzel dadurch wegschaffen, daß man alle übrigen Glieder auf die andere Seite bringt und beide Seiten mit dem Wurzelexponenten potenzirt. Enthält aber eine Gleichung mehrere von einander verschiedene Wurzeln, so hängt es von der Anzahl und sonstigen Beschaffenheit derselben ab, ob sie sich durch wiederholtes Potenziren in der angegebenen Art entfernen lassen.

Anm. Aus dem Gesagten ergiebt sich, daß man im Allgemeinen den Grad einer Gleichung nur aus der geordneten Form sicher erkennt.

§. 136. Aufgaben.

Die nachstehenden Gleichungen nach x aufzulösen. (Vergl. §. 135, 1.)

I. $3x + 7 - 5x + 9 - 21 = 2x - 12 - 10x + 13.$

Durch Transponiren erhält man:

$$3x - 5x - 2x + 10x = -12 + 13 - 7 - 9 + 21.$$

Durch Addition der einzelnen Glieder geht die Gleichung über in:

$$6x = 6,$$

und hieraus folgt: $x = 1.$

II. $6x - 5(2x - 1) = 3(x - 7) - 2(x + 3) + 2.$

Führt man die Multiplicationen aus, so ist

$$6x - (10x - 5) = (3x - 21) - (2x + 6) + 2,$$

$$6x - 10x + 5 = 3x - 21 - 2x - 6 + 2.$$

Durch Transponiren der Glieder erhält man:

$$6x - 10x - 3x + 2x = -21 - 6 + 2 - 5,$$

daher $-5x = -30,$

$$x = 6.$$

III. $ax + (b - x)c - (d - e)x = f + (g - h)x.$

Es folgt $ax + bc - xc - dx + ex = f + gx - hx,$

$$ax - cx - dx + ex - gx + hx = f - bc,$$

$$x(a - c - d + e - g + h) = f - bc,$$

$$x = \frac{f - bc}{a-c-d+e-g+h}.$$

§. 137. Aufgaben.

Die nachstehenden Gleichungen nach x aufzulösen. (Vergl. §. 135, 2.)

I. $\frac{x + 4}{3} - \frac{2x + 5}{4} = \frac{6x + 3}{2} + \frac{1}{6}.$

Multiplicirt man mit dem Generalnenner 12, so ist

$$\frac{x + 4}{3} . 12 - \frac{2x + 5}{4} . 12 = \frac{6x + 3}{2} . 12 + \frac{1}{6} . 12,$$ oder

$$(x + 4) . 4 - (2x + 5) . 3 = (6x + 3) . 6 + 2,$$

oder $4x + 16 - 6x - 15 = 36x + 18 + 2,$

daher $4x - 6x - 36x = 18 + 2 - 16 + 15,$

$$-38x = 19,$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

II. $\frac{3x + 7 - (4x - 5) + 6x}{5x - 8 - (x - 5)} = 3.$

Es folgt $\frac{3x + 7 - 4x + 5 + 6x}{5x - 8 - x + 5} = 3,$

$$\frac{5x + 12}{4x - 3} = 3,$$

$$5x + 12 = 12x - 9,$$

$$5x - 12x = -9 - 12,$$

$$-7x = -21,$$

$$x = 3.$$

III. $$\frac{x}{a} + \frac{b - x}{c} + d = \frac{f}{a} - \frac{g - x}{b}.$$

Multiplicirt man mit dem Generalnenner abc, so ist

$$xbc + bab - xab + dabc = fbc - gac + xac,$$

daher $$xbc - xab - xac = fbc - gac - bab - dabc,$$

$$x(bc - ab - ac) = fbc - gac - bab - dabc,$$

$$x = \frac{fbc - gac - bab - dabc}{bc - ab - ac}.$$

§. 138. Aufgaben.

Die nachstehenden Gleichungen, in welchen die Wurzeln eindeutig sind, nach x aufzulösen. (Vergl. §. 135, 3.)

I. $$2\sqrt{x - 4} + 8 = 18 - 3\sqrt{x - 4}.$$

Es folgt $$5\sqrt{x - 4} = 10,$$

$$\sqrt{x - 4} = 2,$$

$$x - 4 = 4,$$

$$x = 8.$$

II. $$\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 4} = 7.$$

Es folgt $$\sqrt{x + 3} = 7 - \sqrt{x - 4},$$

$$x + 3 = 49 + x - 4 - 14\sqrt{x - 4},$$

$$\sqrt{x - 4} = 3,$$

$$x = 13.$$

Aufgaben.

I. Gegebene Gleichungen.

1) $3x + 5 - 12x = -22$;

2) $8x + 9 + 5x - 11 - 3x = 9x + 2$;

3) $3x - 4 = 12x - 67$;

4) $15x + 7 - 23x = 135x + 1 - x$;

5) $35x + 13 + 2 = 60x$;

6) $x + 2x - 5x + 4x - 1 = -3x$;

7) $3x - 12(x + 1) = -12$;

8) $(7x - 6) \cdot 6 = (2x + 20)\, 2$;

9) $-6(x + 9) + (x + 9)\, 16 = 0$;

10) $5x - (2x + 3) - 2 - 8x = -6$;

11) $24x + 2 + 6(x - 4) + 28 - 21x - 6 = -5$;

12) $20x - 2(x + 7) - 6 = (x + 3)\, 9 + 7$;

13) $(36x + 24)\, 3 - (5x - 36) - 8 = 171x + 32$;

14) $7x + 4 - [3 - (2x + 7)] = 8 - (4 - 11x)$;

15) $3x - (5 - 2x) - (15 + 8x) = 3 - (6x + 2) + [1 - (2x + 2)]$;

16) $2(x + 7)(3x - 4) = 6x(x + 6) - [9(2x + 1) - 1]$;

17) $3(2x - 3)(4x - 7) + 11(x + 2) = 6x(2 + 4x) - (2 - 8x)$;

18) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + 3 = \frac{x}{6} + x - 4$;

19) $\frac{6x}{7} + 3 - \frac{x}{2} = \frac{x}{3} + \frac{x - 17}{3}$;

20) $\frac{7x + 3}{2} - \frac{7 - 3x}{2} + \frac{6 + 8x}{7} - \frac{6x + 1}{7} = 4$;

21) $\frac{8x - 12}{5} + \frac{3x - 7}{4} = 2x - 1$;

22) $\frac{x - 3}{4} - \frac{7 - x}{2} + \frac{8 - x}{2} = \frac{1}{12}$;

23) $\frac{12x - 8}{5} - \frac{3x - 11}{2} - \frac{7x - 30}{4} - 8 = 0$;

24) $\frac{13x - 7}{4} - \frac{(6x - 3) \cdot 5}{7} = \left(\frac{x - 3}{6} - \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{1}{4}$;

25) $\frac{13x - 15}{4} + (3 - x)(8x + 7) + 24x \cdot \frac{x - 4}{3} + \frac{4x}{3} + 14 = 0$;

26) $\left(\frac{x + 1}{3} - \frac{x + 1}{2} + \frac{2x}{5}\right) \frac{5x}{4} = x^2 - \frac{15x}{4}$;

27) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - 1 + \frac{1}{3x} = -\frac{1}{4x} - \frac{1}{5x}$;

28) $\frac{1}{5x} - 3 + \frac{7}{4x} = \frac{19}{20x}$;

29) † $(x+2):(x-3)=(x-2):(x-6)$;

30) † $\left(\frac{x}{3}+1\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x-2}{3}:(x-7)$;

31) † $(x-2)\cdot(5-x):(6x+4)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(5-\frac{x}{2}\right):(3x+2)$;

32) † $\left(\frac{2x-1}{2}+\frac{x}{3}\right):\left(3x-\frac{2-x}{3}\right)=\frac{12x-37}{6}:(5x-14)$;

33) † $\left(\frac{4x+2}{x-2}-2\right):\left(\frac{12x+6}{x-2}-4\right)=\left(\frac{4x+2}{x-2}+1\right):\left(\frac{12x+6}{x-2}+6\right)$ *);

34) $5{,}5x-0{,}5x+4{,}263=8x-1{,}737$;

35) $\frac{5{,}072}{6}x+\frac{x}{2}=\frac{6{,}25}{4}x-1{,}303$;

36) $0{,}2+x-0{,}34x=3{,}25x-5{,}007$;

37) $7{,}6988-\frac{3}{4}x+18{,}1x=\frac{x}{10}+5x+7834{,}5035$;

38) $\sqrt{x+7}=3$;

39) $\sqrt{3x-8}=5$;

40) $\sqrt{5x+11}:\sqrt{5x-9}=3:2$;

41) $\sqrt{x^2+9}=x+1$;

42) $\sqrt{x-4}=\sqrt{x-12}-2$;

43) $\sqrt{8x+1}=2\cdot\sqrt{2x+3}-1$;

44) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-2}=7$;

45) $\sqrt{3+4x}-\sqrt{4\frac{1}{4}+4x}=-\frac{1}{2}$;

46) $ax+bx-f=gx+hx-d$;

47) $(a-x)c-(b+x)(d-e)=e(b-x)$;

48) $xa+x+3ab-bx=-3b+abx$;

49) $\frac{4ab+cx}{d}=xa+\frac{b}{c}$;

50) $\frac{acd}{bx}=ac+\frac{d}{x}-1$;

51) $\frac{a(b^2-x^2)}{bx}=ab-\frac{ax}{b}$;

---

*) Man setze $(4x+2):(x-2)=y$.

52) $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\frac{a^2c}{b}+x^2$;

53) $\frac{ax}{2a-b}+\frac{5b(2a-b)}{b^2-a^2}-\frac{5ab}{3a-b}=\frac{(3a^2-b^2)x}{2ab(b-a)}+\frac{(3a^2+b^2)x}{2ab(a+b)}$;

54) $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$;

55)† $\frac{3a-5x}{a-c}+\frac{2a-x}{d}=\frac{a+f}{a-c}-dx$;

56)† $\frac{a-bx}{c}+\frac{ebx^2}{c(c+ex)}=\frac{d+fx}{c+ex}$;

57)† $\frac{x-a}{x+a}-\frac{x+a}{x-a}=\frac{b+cx}{a^2-x^2}$;

58)† $\left(\frac{x-a}{x+a}-c\right)\left(\frac{x-a}{x+a}-d\right)=\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2+2ax+a^2}-c^2$;

59)† $\sqrt{a+x}+\sqrt{x}=\frac{2a}{\sqrt{a+x}}$;

60)† $(\sqrt{x+a}-a)(\sqrt{a+x}-b)=x+a(1-a)$;

61)† $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4a^2}{b^2}-\frac{c}{x^2}}}+\frac{1}{x}=\frac{a}{b}$;

62) $\sqrt{x+a}-b=\sqrt{x+c}$.

II. Aufgaben, für welche die Gleichungen erst gesucht werden müssen.

63) 600 Thlr. sollen so unter vier Personen getheilt werden, daß die erste halb so viel wie die zweite, diese halb so viel wie die dritte, und diese halb so viel wie die vierte erhalte. Wie viel wird jede erhalten?

64) Von drei neben einander liegenden Gärten ist der erste um 200 Quadratruthen kleiner als der zweite und dritte zusammen genommen, der zweite aber um 100 Quadratruthen größer als der dritte. Wie groß ist jeder der drei Gärten, wenn alle drei zusammen 800 Quadratruthen groß sind?

65) 1300 Thlr. sollen unter drei Personen getheilt werden; die erste soll $1\frac{1}{2}$ mal mehr bekommen als die zweite, ferner die dritte halb so viel als die erste. Wie viel erhält jede?

66) Drei Zahlen sollen sich verhalten wie $m:n:v$, und ihre Summe soll gleich a sein. Welches sind diese Zahlen?

67) Eine Zahl a soll in drei Theile zerlegt werden, so daß sich der erste Theil zum zweiten wie $m:n$, der zweite zum dritten wie $v:w$ verhalte. Welche Theile sind es?

68) Ein Spieler verlor in 3 Tagen seine ganze Baarschaft bis auf 2 Thlr., am ersten Tage nämlich $^7/_{12}$ seines Geldes, am zweiten $^3/_5$ des Restes und am dritten $^6/_7$ des abermaligen Restes. Wie viel hatte er anfangs?

69) Bei welcher Zahl ist der 6te Theil um 4 größer als der 8te Theil?

70) Bei welcher Zahl ist der $a$te Theil um m größer, als der $b$te Theil?

71) Welche Zahl muß man zum Zähler und zum Nenner des Bruches $^5/_9$ addiren, wenn derselbe gleich $^2/_3$ werden soll?

72) Welche Zahl muß man zum Zähler und zum Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ addiren, wenn derselbe gleich $\frac{c}{d}$ werden soll?

73) Welche Zahl muß man zum Zähler des Bruches $^{59}/_{101}$ addiren und vom Nenner desselben subtrahiren, wenn derselbe gleich $^2/_3$ werden soll?

74) Welche Zahl muß man zum Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ addiren und vom Nenner desselben subtrahiren, wenn derselbe gleich $\frac{c}{d}$ werden soll?

75) Welche Zahl giebt, wenn sie zu 6 addirt wird, dasselbe, als wenn sie mit 6 multiplicirt wird?

76) Welche Zahl giebt, wenn sie zu a addirt wird, dasselbe, als wenn sie mit a multiplicirt wird?

77) Welche Zahl giebt, wenn sie von 6 subtrahirt wird, dasselbe, als wenn sie mit 6 multiplicirt wird?

78) Welche Zahl giebt, wenn sie von a subtrahirt wird, dasselbe, als wenn sie mit a multiplicirt wird?

79) Ein Kaufmann bezahlt zwei Rechnungen, die eine mit $^1/_3$, die andere mit $^1/_5$ seiner Kasse, erhält aber gleichzeitig eine Rechnung bezahlt, deren Betrag gleich dem vierten Theil der Kasse ist. Diese verringert sich hierbei im Ganzen um 850 Thlr. Wie groß war dieselbe?

80) Wie groß war hingegen die Kasse, wenn er die erste Rechnung mit $^1/_5$ derselben, die zweite mit $^1/_3$ des Restes bezahlte, durch die einlaufende Rechnung der Kassenbestand sich um $^3/_4$ vermehrte, und nun bloß noch 400 Thlr. am anfänglichen Bestande fehlten?

81) Ein Vater ist 40 Jahre alt, sein Sohn 12 Jahre. Nach wie viel Jahren wird der Vater dreimal so alt sein, als der Sohn?

82) Ein Vater ist 60 Jahre alt, sein Sohn 32. Vor wie viel Jahren war der Vater achtmal so alt, als der Sohn?

83) Ein Vater ist viermal so alt, als sein Sohn, und war 8 Jahre vorher zehnmal so alt, als derselbe. Wie alt sind jetzt beide?

84) Ein Vater ist 30 Jahre älter als sein Sohn. Wie alt sind beide, wenn zugleich der Vater sechsmal so alt ist, als der Sohn?

85) Ein Vater ist bmal so alt, als sein Sohn, und wird nach m Jahren cmal so alt sein, wie derselbe. Wie alt sind beide?

86) Jemand verspielt von seinem Gelde den dritten Theil und 1 Thlr., ein anderes Mal vom Reste den siebenten Theil und 2 Thlr. Hierauf hat er bloß noch $^8/_{15}$ von seinem anfänglichen Vermögen. Wie groß war dasselbe?

87) Ein Bote geht den fünften Theil seines Weges und fährt hierauf 4 Meilen; den andern Tag geht er den vierten Theil des noch übrigen Weges und fährt wieder 5 Meilen. Wenn er nun in diesen beiden Tagen eben so viel Meilen gegangen, als gefahren ist, wie viel Meilen hat er alsdann noch zurückzulegen?

88) Eine Summe soll so unter drei Personen getheilt werden, daß die erste den halben Theil und 50 Thlr., die zweite vom Reste den dritten Theil und noch 50 Thlr., die dritte die noch übrigen 150 Thlr. erhalte. Wie groß war die Summe?

89) Eine Erbschaft soll so getheilt werden, daß der erste Erbe den vierten Theil und noch 100 Thlr., der zweite vom Reste den vierten Theil und noch 200 Thlr., der dritte wieder vom Reste den vierten Theil und noch 300 Thlr. erhalten soll, und nach demselben Verhältniß die übrigen Erben. Wenn nun doch alle gleichviel erhalten, wie groß war alsdann die Erbschaft?

90) Wenn in voriger Aufgabe der erste Erbe den aten Theil und noch b Thlr., der zweite vom Reste wieder den aten Theil und noch 2b Thlr. erhält, und nach Verhältniß die übrigen, und doch zuletzt alle gleichviel erhalten, wie groß war alsdann die Erbschaft, und wie viel Erben waren es?

91) Wie groß ist hingegen die Erbschaft, wenn der erste Erbe zunächst 100 Thlr. und vom Reste den fünften Theil, der zweite zunächst 200 Thlr. und vom Reste den fünften Theil erhält u. s. w., und doch alle gleichviel erhalten?

92) Wie groß ist hingegen die Erbschaft, und wie viel Erben sind es, wenn der erste Erbe zunächst b Thlr. und dann vom Reste den aten Theil, der zweite zunächst 2b Thlr. und dann vom Reste den aten Theil erhält u. s. w., und alle gleichviel erhalten?

93) 3050 Soldaten werden auf 90 Kähnen über einen Fluß gesetzt. Die einzelnen Kähne fassen theils 20, theils 45 Mann. Wie viel Kähne der größern Art waren vorhanden?

94) 193 Thlr. werden theils in Dukaten, theils in Friedrichsdoren bezahlt. Wenn nun der Dukaten zu $3\frac{1}{6}$ Thlr., der Friedrichsdor zu $5\frac{2}{3}$ Thlr. gerechnet wird, und im Ganzen 42 Geldstücke ausgezahlt werden, wie viel Friedrichsdor wurden alsdann bezahlt?

95) Eine Anzahl Hasen und Rehe, zusammen 100 Stück, werden mit 260 Thlr. bezahlt. Ein Reh wird dabei mit 4 Thlr., ein Hase mit $\frac{1}{2}$ Thlr. bezahlt. Wie viel Rehe waren es?

96) Ein Grundstück von 80 Morgen besteht zu drei Theilen aus Acker, zu zwei Theilen aus Garten. Nachdem einige Morgen Acker verkauft worden sind, verhält sich die Größe des Gartens zu der des Ackers wie 8 : 11. Wie viel Morgen wurden verkauft?

97) Die Preise zweier Waaren verhalten sich bei gleichen Mengen wie 12 : 7. Würde aber von der bessern Sorte das Pfund um 1 Sgr. billiger gegeben, so verhielten sich die Preise wie 5 : 3. Wie viel kostet das Pfund der bessern Sorte?

98) Die Einwohnerzahlen dreier Städte verhielten sich sonst wie 2 : 4 : 5. Bei einer neuen Zählung ergab sich aber, daß die Einwohnerzahl der ersten Stadt um 300, die der zweiten um 700, und die der dritten um 1000 sich vermehrt, und daß die Gesammtbevölkerung dadurch um $\frac{1}{33}$ zugenommen hatte. Wie verhalten sich jetzt die Einwohnerzahlen?

99) Zu 18 Pfund einer Legirung aus Zinn und Blei, in der sich das Zinn zum Blei wie 5 : 4 verhält, werden einige Pfund einer zweiten Legirung, in welcher doppelt so viel Zinn wie Blei ist, gesetzt. Wenn sich nun in der so entstandenen Legirung Zinn und Blei wie 3 : 2 verhalten, wie viel Pfund der zweiten Legirung wurden alsdann zugesetzt?

100) Bei jedem Spiele wettete Jemand 4 Thlr. gegen 3 Thlr. Nach 12 Spielen hatte er 20 Thlr. verloren. Wie oft hatte er verloren?

101) In einer Abendgesellschaft ist der Beitrag zu jeder Versammlung 10 Sgr.; ein fehlendes Mitglied zahlt jedoch bloß 2 Sgr. Wenn nun ein Theil=

nehmer für 20 Versammlungen 5 Thlr. 10 Sgr. bezahlt, wie oft hat er alsdann gefehlt?

102) Ein Kaufmann übergab einem Fuhrmann eine Fracht 50 Meilen weit zu fahren unter der Bedingung, daß er bei richtiger Ablieferung derselben 40 Thlr. baar erhalten, und ein ihm früher gegebener Vorschuß getilgt sein sollte. Der Fuhrmann brachte aber die Fracht nur 28 Meilen weit. Er erhielt daher die 40 Thlr. nicht und blieb noch auf den Vorschuß 4 Thlr. schuldig. Wie viel betrug der Vorschuß?

103) Von einem Kapitale steht der vierte Theil zu 3 %, der dritte Theil zu 4 % und der Rest zu 6 %. Wie groß war das Kapital, wenn es binnen 4 Jahren 550 Thlr. Zinsen brachte?

104) Welches Kapital beträgt mit seinen Zinsen nach m Jahren bei p % a Thlr.?

105) Wie groß muß das Kapital sein, bei welchem der mte Theil jährlich a Thlr. weniger Zinsen bringt, als der Rest, wenn zugleich das ganze Kapital zu p % steht?

106) Zwei Kapitalien betragen zusammen 8000 Thlr. Das eine steht zu 5 %, das andere zu 3 %, aber beide geben jährlich gleich viel Zinsen. Wie groß ist jedes?

107) Bei welchem Kapitale giebt die eine Hälfte, die zu 3 % steht, jährlich 600 Thlr. Zinsen weniger als die andere Hälfte, die zu 4 % steht?

108) Wie groß muß das Kapital sein, bei welchem der mte Theil, der zu p % steht, jährlich a Thlr. mehr Zinsen bringt, als der Rest, welcher zu t % steht?

109) Zwei Kapitalien, welche zusammen a Thlr. betragen, und von denen das eine zu p %, das andere zu t % steht, bringen jährlich gleichviel Zinsen. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien?

110) Ein Kaufmann bezahlt das Pfund einer Sendung mit 7 Sgr. Von dieser Waare verderben ihm jedoch 20 Pfd. Da er aber das Pfund zu 8 Sgr. verkauft, so gewinnt er $11\frac{3}{7}$ Prozent. Wie viel Pfunde hatte er eingekauft?

111) Ein Fabrikant verkauft seine Waaren mit 20 % Rabatt. Um den wie vielten Theil muß er den Preis seiner Waaren erhöhen, wenn er 25 % Rabatt geben und doch den nämlichen Preis erhalten will?

112) Wird das Pfund einer Waare mit 8 Sgr. bezahlt, so sind 12 % davon reiner Gewinn. Wird es aber mit $7\frac{1}{2}$ Sgr. bezahlt, so bleiben nach Abzug von 4 % immer noch 16 Sgr. Gewinn. Wie viel Pfunde sind es?

113) Ein Kapital von 1100 Thlr. mit den 10monatlichen Zinsen liefert die Pacht für 4 Grundstücke von gleichem Werthe auf 10 Monate. Ein Kapital von 1200 Thlr. würde mit den 15monatlichen Zinsen die Pacht für 5 Grundstücke von gleichem Werthe, wie die ersteren, auf 9 Monate liefern. Zu wie viel Prozent standen beide Kapitalien?

114) Ein Kaufmann vermehrte sein Vermögen jährlich um 20 Prozent, nahm aber alle Jahre 1000 Thlr. davon weg. Nach drei Jahren findet er, daß nach Abzug der gewöhnlichen 1000 Thlr. das Vermögen sich um 200 Thlr. über $\frac{3}{5}$ des angelegten Kapitals vermehrt habe. Wie groß war das angelegte Kapital?

115) Um die Kosten zu einer gemeinschaftlichen Reise aufzubringen, giebt jeder Theilnehmer zunächst 6 Thlr. Da aber noch 7 Thlr. fehlen, so giebt jeder Theilnehmer noch 1 Thlr. nach, wodurch ein Ueberschuß von

1 Thlr. entsteht. Wie viel Theilnehmer waren es, und wie viel betrugen die Kosten?

116) Wird das Pfund einer Sendung mit 8 Sgr. bezahlt, so gewinnt der Kaufmann 12 Thlr. Wird es aber nur mit $7\frac{1}{2}$ Sgr. bezahlt, so verliert er 4 Thlr. Wie viel Pfund enthält die Sendung, und wie viel kostet die ganze Sendung?

117) Ein Fuhrmann hat die Anfuhr einer bestimmten Anzahl Steine übernommen. Macht er täglich drei Fuhren und ladet dabei jedesmal gleichviel Steine auf, so sind nach 6tägigem Fahren die Steine fortgeschafft. Fährt er jedoch täglich viermal mit einem kleinern Wagen, der 100 Steine weniger faßt, als der erste, so könnte er in derselben Zeit 2400 Steine mehr fahren. Wie viel Steine hat er zu fahren, und wie viel faßt jeder Wagen?

118) Eine Baumschule soll in Form eines Quadrats angelegt werden. Bei dem ersten Versuche bleiben jedoch 43 der vorhandenen Bäume übrig. Als nun die Seite des Quadrats um 1 vermehrt wurde, so fehlten 30 Bäume an der nöthigen Anzahl. Wie viel Bäume waren es?

119) Beim Ausziehen der Quadratwurzel aus einer dreiziffrigen Quadratzahl war das Resultat um 1 zu klein, und es blieb ein Rest von 33. Dies kam daher, weil die mittlere schlecht geschriebene Ziffer mit einer um 2 kleineren verwechselt worden war. Nach Abänderung dieses Fehlers ergab sich das richtige Resultat. Welches war die richtig geschriebene Zahl?

120) Als man aus dem Fenster eines Thurmes einen Stein herabfallen ließ, fiel derselbe genau nach einigen Sekunden auf einen 75 Fuß über der Erde befindlichen Vorsprung. Bei einem zweiten Versuche wurde der Vorsprung vermieden, und der Stein brauchte nun eine Sekunde mehr, um auf die Erde zu gelangen. Wie hoch war das Fenster über der Erde?

(Es ist hierbei angenommen, daß der Stein in einer Sekunde 15 Fuß, in 2 Sekunden $2^2 . 15$ Fuß, und in m Sekunden $m^2 . 15$ Fuß fällt.)

121) Zwei Freunde reisen einander entgegen. Der eine macht täglich 5, der andere täglich 4 Meilen. Nach wie viel Tagen treffen sie sich, wenn der Weg 81 Meilen beträgt?

122) Wie lange reisen dieselben, wenn der Weg b Meilen beträgt und der eine täglich m, der andere täglich n Meilen macht, und wie viel Meilen macht jeder?

123) Einem Wettrenner, der in der Sekunde 40 Fuß zurücklegte, folgte 12 Sekunden später ein anderer, der in der Sekunde 45 Fuß zurücklegte. Nach wie viel Sekunden wird der erste eingeholt sein?

124) Die eine von zwei Wasserröhren liefert stündlich 200 Quart, die andere 240 Quart. Wenn nnn die erste 6 Stunden früher geöffnet wird als die zweite, wie lange wird die zweite dann fließen müssen, um 400 Quart mehr als die erste fortwährend thätige zu liefern?

125) Wenn die eine Röhre stündlich a Quart, die andere $a + b$ Quart liefert, und die erste m Stunden früher geöffnet wird, wie viel Stunden muß dann die zweite fließen, um c Quart mehr als die erste fortwährend thätige zu liefern?

126) Wenn sich die Zeiger einer Uhr zwischen 5 und 6 (allgemein zwischen a und $a + 1$) decken, wie viel Uhr ist es alsdann? Wann bilden sie ferner einen gestreckten Winkel mit einander?

127) Auf der Peripherie eines Kreises, welche p Fuß mißt, bewegen sich zwei Körper gleichzeitig. Der eine macht in der Sekunde c, der andere d Fuß. Wenn sie nun von demselben Punkt ausgehen und $d < c$ ist, nach welchen Zeiten geht dann der eine über den andern weg?

128) Nach welchen Zeiten geht aber der eine über den andern weg, wenn der sich langsamer bewegende dem andern um f Fuß voraus war?

129) Man soll die Größe dreier Weinfässer aus folgender Angabe bestimmen. Wenn man das erste leere Faß aus dem zweiten vollen Fasse füllt, so bleibt im zweiten nur $^2/_9$ des Weins zurück; füllt man das zweite leere Faß aus dem dritten vollen Fasse, so bleibt im dritten nur $^1/_4$ des Weins zurück; wollte man aber das dritte leere Faß aus dem ersten vollen Fasse füllen, so würden 50 Quart fehlen. Wie viel Quart hält jedes von diesen drei Fässern?

130) Jemand hat vier Weinfässer von verschiedener Größe. Füllt er das zweite leere Faß aus dem ersten vollen, so bleibt im ersten nur $^4/_7$ des Weins zurück; füllt er das dritte leere Faß aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten nur $^1/_4$ des Weins zurück; füllt er das vierte leere Faß aus dem dritten vollen, so wird nur $^9/_{16}$ des vierten gefüllt; wollte er aber das dritte und vierte leere Faß aus dem ersten vollen füllen, so würden nicht allein diese gefüllt, sondern es blieben ihm noch 15 Quart übrig. Wie viel Quart hält jedes von diesen vier Fässern?

131) Aus zwei ungleichen Oeffnungen eines Behälters strömt das Wasser mit einer ungleichen Geschwindigkeit heraus. Man weiß, daß die Oeffnungen sich wie 5 : 13, die Geschwindigkeiten der Wasserströme aber wie 8 : 7 verhalten; man weiß ferner, daß aus der einen Oeffnung in einem gewissen Zeitraume 561 Kubikfuß Wasser mehr floß, als aus der andern. Wie viel Wasser gab nun jede Oeffnung in diesem Zeitraume?

132) Zwei Schreiber sind mit zwei verschiedenen Abschriften beschäftigt. Die Zeiten, in welchen beide einen Bogen ihrer Arbeit schreiben, verhalten sich wie 7 : 5, die Vergütigungen für einen Bogen wie 10 : 7. Wenn nun der zweite schon 6 Bogen geschrieben hatte, ehe der erste anfing, wie viel Bogen wird dieser schreiben müssen, um eben so viel verdient zu haben, wie der zweite fortwährend thätige?

133) Bei zwei Fabrikanten verhalten sich die Preise derselben Waaren wie 8 : 11; die des ersteren nutzen sich jedoch $1^2/_3$ mal schneller ab, als die des andern. Wenn nun außerdem der zweite auf 11 Stück derselben Sorte das zwölfte umsonst giebt, der erste aber nicht, wie ist dann bei beiden das Verhältniß der Werthe für Waaren von gleichen Preisen?

134) Zwei Körper, deren Massen sich wie 5 : 3 verhalten, werden durch zwei Kräfte in Bewegung gesetzt, deren Größen sich wie 11 : 7 verhalten. Der erste Körper ist 6 Sekunden früher in Bewegung gesetzt worden. Nach wie viel Sekunden wird er von dem andern eingeholt werden, wenn nach der 24sten Sekunde die Geschwindigkeit desselben durch einen Stoß um $^1/_{35}$ vergrößert wird?

135) Zwei Couriere werden einander entgegengeschickt. Der eine würde den Weg in 12, der zweite in 10 Stunden machen. Nach welcher Zeit treffen sie sich?

136) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden. Die erste allein würde ihn in 2, die zweite in 4, die dritte in 6 Stunden füllen. In welcher Zeit füllen sie gemeinschaftlich den Behälter?

137) Aus einem vollen Wasserbehälter entnimmt eine Pumpe ihr Wasser und würde denselben in 4 Stunden entleeren, wenn er nicht frischen Zufluß aus einer anderen Röhre erhielte, die in 6 Stunden eben so viel Wasser liefert, als der volle Behälter enthält. Nach wie viel Stunden wird der volle Behälter bei gleichzeitiger Thätigkeit von Pumpe und Zuflußröhre entleert sein?

138) Drei Arbeiter arbeiten gemeinschaftlich an einer Arbeit. Der erste allein würde sie in a, der zweite in b, der dritte in c Tagen vollenden. Wie viel Zeit gebrauchen sie bei gemeinschaftlicher Arbeit?

Auflösungen.

1) $x=3$; 2) $x=4$; 3) $x=7$; 4) $x=\frac{3}{71}$; 5) $x=\frac{3}{5}$; 6) $x=\frac{1}{5}$;

7) $x=0$; 8) $x=2$; 9) $x=-9$; 10) $x=\frac{1}{5}$; 11) $x=-\frac{5}{9}$;

12) $x=6$; 13) $x=1$; 14) $x=2$; 15) $x=4$; 16) $x=3$; 17) $x=1$;

18) $x=12$; 19) $x=28$; 20) $x=1$; 21) $x=9$; 22) $x=7$; 23) $x=4$;

24) $x=\frac{1}{2}$; 25) $x=3$; 26) $x=5$; 27) $x=2\frac{17}{60}$; 28) $x=\frac{1}{3}$;

29) $x=18$; 30) $x=-14\frac{2}{3}$; 31) $x=-1\frac{3}{7}$; 32) $x=-4$;

33) $x=4\frac{1}{2}$; 34) $x=2$; 35) $x=6$; 36) $x=2{,}010424\ldots$;

37) $x=638{,}92283\ldots$; 38) $x=2$; 39) $x=11$; 40) $x=5$; 41) $x=4$;

42) $x=13$; 43) $x=3$; 44) $x=5\frac{1}{2}$; 45) $x=-\frac{1}{2}$; 46) $x=\frac{f-d}{a+b-g-h}$;

47) $x=\frac{bd-ac}{2e-c-d}$; 48) $x=\frac{3b}{b-1}$; 49) $x=\frac{b(4ac-d)}{c(ad-c)}$;

50) $x=\frac{d(ac-b)}{b(ac-1)}$; 51) $x=1$; 52) $x=\frac{ac}{b}$; 53) $x=\frac{5b(2a-b)}{3a-b}$;

54) $x=\frac{ab}{a+b}$; 55) $x=\frac{d(f-2a)-2a(a-c)}{(a-c)(d^2-1)-5d}$; 56) $x=\frac{ac-cd}{bc+cf-ae}$;

57) $x=\frac{b}{4a-c}$; 58) $x=\frac{a(1+c)}{1-c}$; 59) $x=\frac{a}{3}$; 60) $x=a(a-1)$;

61) $x=\frac{b(1+c)}{4a}$; 62) $x=\left(\frac{b^2+a-c}{2b}\right)^2-a$;

63) I. 40 Thlr., II. 80 Thlr., III. 160 Thlr., IV. 320 Thlr.;

64) I. 300, II. 300, III. 200 Quadratruthen;

65) I. 600 Thlr., II. 400 Thlr., III. 300 Thlr.;

66) $\frac{am}{m+n+v}$, $\frac{an}{m+n+v}$, $\frac{av}{m+n+v}$;

67) $\frac{amv}{mv+nv+nw}$, $\frac{anv}{mv+nv+nw}$, $\frac{anw}{mv+nv+nw}$;

68) 84 Thlr.; 69) 96; 70) $m \cdot \frac{ba}{b-a}$; 71) 3; 72) $\frac{ad-bc}{c-d}$; 73) 5;

74) $\frac{bc-ad}{c+d}$; 75) $1\frac{1}{5}$; 76) $\frac{a}{a-1}$; 77) $\frac{6}{7}$; 78) $\frac{a}{a+1}$; 79) 3000 Thlr.;

80) 6000 Thlr.; 81) Nach 2 Jahren; 82) Vor 28 Jahren; 83) V. 48, S. 12;

84) V. 36, S. 6; 85) V. $\frac{c-1}{b-c} \cdot bm$, S. $\frac{c-1}{b-c} m$; 86) 75 Thlr.;

87) 7 Meilen; 88) 700 Thlr.; 89) 1200 Thlr.;

90) Erbschaft $= ab(a-1)$, Erben $= a-1$; 91) 1600 Thlr., 4 Erben;

92) Erbschaft $= b \cdot (a-1)^2$, Erben $= a-1$; 93) 50; 94) 24 Fr.;

95) 60 R.; 96) 4 Morgen; 97) 36 Sgr.; 98) Wie 123 : 247 : 310;

99) 12 Pfd.; 100) 8 mal; 101) 5 mal; 102) 60 Thlr.; 103) 3000 Thlr.;

104) $\frac{100a}{100+mp}$; 105) $\frac{100am}{p(m-2)}$; 106) I. 3000 Thlr., II. 5000 Thlr.;

107) 120000 Thlr.; 108) $\frac{100am}{p+t-mt}$;

109) $\frac{at}{p+t}$ Thlr. zu p % und $\frac{ap}{p+t}$ zu t %; 110) 800 Pfd.;

111) Um den 15ten Theil; 112) 100 Pfd.; 113) $\frac{2}{3}$ % für den Monat;

114) 30000 Thlr.; 115) 8 Theilnehmer, 55 Thlr.; 116) 960 Pfd., 244 Thlr.;

117) 14400 Steine, der erste Wagen faßt 800, der zweite 700 Steine;

118) 1339 Bäume; 119) 729; 120) 135 Fuß; 121) Nach 9 Tagen;

122) Sie gebrauchen $\frac{b}{m+n}$ Tage; der eine macht im Ganzen $\frac{mb}{m+n}$, der andere $\frac{nb}{m+n}$ Meilen;

123) Nach 96 Sekunden; 124) 40 Stunden; 125) $\frac{am+c}{b}$ Stunden;

126) $27\frac{3}{11}$ Minuten nach 5 Uhr; allgemein $5\frac{5}{11}$ a Minuten nach a Uhr; $5\frac{5}{11}$ (a+6) Minuten nach a Uhr bilden sie einen gestreckten Winkel;

127) Nach $\frac{p}{c-d}$, $\frac{2p}{c-d}$, $\frac{3p}{c-d}$ u. s. w. Sekunden;

128) Nach $\frac{f}{c-d}$, $\frac{f+p}{c-d}$, $\frac{f+2p}{c-d}$ u. s. w. Sekunden;

129) I. 70, II. 90, III. 120 Quart; **130**) I. 140, II. 60, III. 45, IV. 80 Quart;
131) Die eine 440, die andere 1001 Kubikfuß; **132**) 210 Bogen;

133) Wie 121 : 160; **134**) Nach 74 Sekunden; **135**) Nach $5\frac{5}{11}$ Stunden;

136) In $1\frac{1}{11}$ Stunde; **137**) In 12 Stunden;

138) In $\frac{abc}{ab+ac+bc}$ Tagen.

B. Von den Gleichungen des ersten Grades mit zwei und mehr Unbekannten.

§. 139. Erklärung.

Enthält eine Gleichung, z. B.

$$x + y = 12$$

zwei Unbekannte, so kann man unendlich viele Werthe für x und y finden, welche der Gleichung genügen, und die Aufgabe ist folglich unbestimmt. Sollen aber die Werthe von x und y auch noch einer zweiten Gleichung genügen, so wird die Aufgabe dadurch zu einer bestimmten.

Anm. Ist die zweite Gleichung der Art, daß man sie aus der ersten ableiten kann, so reichen diese zwei Gleichungen zur Bestimmung von x und y nicht hin, weil beide zusammen nicht mehr sagen, als eine allein.

Die Gleichungen $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$

sind also zur Bestimmung von x und y nicht ausreichend.

Wenn sich ferner beide Gleichungen widersprechen, wie z. B.

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 7, \end{cases}$$

so fordert die Aufgabe Unmögliches.

§. 140. Erklärung.

Die geordnete Form der Gleichungen mit zwei Unbekannten ist:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Haben zwei gegebene Gleichungen nicht diese Form, so ordnet man sie auf dieselbe Art, wie Gleichungen mit einer Unbekannten (§. 135).

Aus diesen zwei Gleichungen sucht man nun eine der beiden Unbekannten zu entfernen (eliminiren) und sucht eine neue Gleichung zu bilden, die Eliminationsgleichung, welche nur eine Unbekannte enthält und folglich in bekannter Art zu lösen ist. Die Eliminationsgleichung kann man nach drei verschiedenen Methoden erhalten, nach der Combinations-, Substitutions-, oder Additionsmethode.

§. 141. Erklärung.

Um die Eliminationsgleichung nach der Combinationsmethode zu finden, löst man zunächst beide Gleichungen nach y (oder nach x) auf. Die aus den beiden Gleichungen für y erhaltenen Werthe müssen aber einander gleich sein, und da beide Werthe den Ausdruck x enthalten, so bilden sie eine neue Gleichung mit einer Unbekannten (x). Diese löst man nach x auf.

Um ferner y zu finden, setzt man den für x erhaltenen Werth in einer der beiden Gleichungen, welche den Werth von y angeben, statt x ein.

Beispiel I. $$\begin{cases} 3x + 4y = 25, \\ 4x - 2y = 4. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$1)\ y = \frac{25 - 3x}{4}; \quad 2)\ y = 2x - 2.$$

Es ist also
$$\frac{25 - 3x}{4} = 2x - 2,$$
$$25 - 3x = 8x - 8,$$
$$-11x = -33,$$
$$x = 3.$$

Setzt man diesen Werth 3 in Gleichung 2) statt x ein, so erhält man:

$$y = 2x - 2 = 6 - 2 = 4.$$

Beispiel II. $\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$1)\ y = \frac{c - ax}{b},\quad 2)\ y = \frac{f - dx}{e}.$$

Es ist also $\frac{c - ax}{b} = \frac{f - dx}{e}$,

$$ce - aex = fb - dbx,$$

$$ce - fb = aex - dbx = x\,.\,(ae - db),$$

$$\frac{ce - fb}{ae - db} = x.$$

Ferner ist $y = \frac{c - a\left\{\frac{ce - fb}{ae - db}\right\}}{b} = \frac{cae - cdb - ace + afb}{b\,.\,(ae - db)} =$

$$\frac{b(af - cd)}{b(ae - db)} = \frac{af - cd}{ae - db}.$$

§. 142. Erklärung.

Um die Eliminationsgleichung nach der Substitutionsmethode zu finden, bestimmt man den Werth von y (oder von x) aus einer der beiden gegebenen Gleichungen und setzt den gefundenen Werth in der anderen Gleichung statt y ein.

Beispiel. $\begin{cases} 1)\ 5x + 3y = 13 \\ 2)\ 4x + 11y = 19. \end{cases}$

Nach 1) ist $y = \frac{13 - 5x}{3}$. Setzt man diesen Werth in der zweiten Gleichung statt y ein, so erhält man:

$$4x + 11\,.\,\frac{13 - 5x}{3} = 19,$$

oder $12x + 143 - 55x = 57,$

$$12x - 55x = 57 - 143,$$

$$-43x = -86,$$

$$x = 2.$$

Setzt man diesen Werth in der Gleichung $y = \frac{13 - 5x}{3}$ ein, so ergiebt sich für y der Werth 1.

§. 143. Erklärung.

Um die Eliminationsgleichung nach der Additionsmethode zu finden, formt man zunächst beide Gleichungen so um, daß in beiden diejenige Unbekannte, welche eliminirt werden soll, ein und denselben Zahlenfaktor (Coefficienten) erhält. Dies erreicht man dadurch, daß man jede der beiden Gleichungen mit demjenigen Coefficienten multiplicirt, den die betreffende Unbekannte in der anderen Gleichung hat. Um also z. B. aus den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} 1)\ 3x + 4y = 25 \\ 2)\ 5x + 3y = 27 \end{cases}$$

die Unbekannte x zu eliminiren, multiplicirt man 1) mit 5, 2) mit 3, und erhält

$$\begin{cases} 15x + 20y = 125 \\ 15x + 9y = 81. \end{cases}$$

Nun subtrahirt man die zweite dieser Gleichungen von der ersten (oder addirt beide, wenn die zu eliminirenden Glieder verschiedene Vorzeichen haben), und erhält

$$11y = 44,$$
$$y = 4.$$

Setzt man endlich diesen Werth 4 statt y in einer der gegebenen Gleichungen, z. B. in $3x + 4y = 25$ ein, so ist

$$3x + 16 = 25,$$
$$x = 3.$$

§. 144. Erklärung.

Kommen in einer Gleichung drei (oder m) Unbekannte vor, so muß man zur Bestimmung derselben drei (oder m) von einander unabhängige Gleichungen haben. Die geordnete Gleichungsform ist alsdann:

$$\begin{cases} 1)\ ax + by + cz = m \\ 2)\ a'x + b'y + c'z = m' \\ 3)\ a''x + b''y + c''z = m'', \end{cases}$$

wobei natürlich einzelne der Coefficienten gleich 0 sein können.

Aus diesen Gleichungen eliminirt man nach einer der drei gegebenen Methoden eine Unbekannte und bildet zwei Eliminationsgleichungen mit zwei Unbekannten.

1) Combinationsmethode. Man bestimmt eine der Unbekannten, z. B. x, aus allen drei Gleichungen. Bezeichnet man die drei gefundenen Werthe, welche noch y und z enthalten, durch A, B, C, so sind

$$\begin{cases} A = B \\ A = C \end{cases} \text{oder} \begin{cases} A = B \\ C = B \end{cases} \text{oder} \begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases}$$

die Eliminationsgleichungen, welche man als Gleichungen mit zwei Unbekannten in bekannter Weise löst.

2) Substitutionsmethode. Man bestimmt x (oder y, oder z) aus einer der drei Gleichungen, setzt den gefundenen Werth in den übrigen Gleichungen statt x ein und erhält so zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

3) Additionsmethode. Man eliminirt eine der Unbekannten durch Verbindung der Gleichungen 1 und 2, 1 und 3, oder 1 und 2, 2 und 3, oder 1 und 3, 2 und 3. (Vergl. §. 143.)

Welche von den drei Methoden die vortheilhafteste sei, hängt von der Aufgabe ab.

Zur Bestimmung von m Unbekannten braucht man m Gleichungen. Aus diesen eliminirt man eine Unbekannte und erhält (m — 1) Gleichungen mit (m — 1) Unbekannten. Nun eliminirt man wieder eine Unbekannte und setzt dies so lange fort, bis man schließlich eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält.

Beispiel I.

$$\begin{cases} 1)\ 2x + 3y + 4z = 20 \\ 2)\ 3x + 4y + 5z = 26 \\ 3)\ 4x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

Um x mit Hülfe der Additionsmethode zu eliminiren, verbindet man die Gleichungen 1) und 2), ferner 1) und 3). Alsdann ist:

$$\begin{array}{rrl} \text{nach 1)} & 6x + 9y + 12z = 60, & \\ \text{nach 2)} & 6x + 8y + 10z = 52, & \\ \hline \text{daher} & y + 2z = 8; & \text{(a)} \\ \text{ferner nach 1)} & 4x + 6y + 8z = 40, & \\ \text{nach 3)} & 4x + 2y - 3z = -1, & \\ \hline \text{daher} & 4y + 11z = 41. & \text{(b)} \end{array}$$

Um y aus den Gleichungen a) und b) zu eliminiren, multiplicirt man die Gleichung a) mit 4. Alsdann ist

$$\begin{array}{lrl} \text{nach a)} & 4y + 8z &= 32, \\ \text{nach b)} & 4y + 11z &= 41, \\ \hline \text{daher} & 3z &= 9, \\ & z &= 3. \end{array}$$

Setzt man in der Gleichung a) den für z gefundenen Werth 3 statt z ein, so ergiebt sich $y = 2$, und setzt man in einer der drei ursprünglichen Gleichungen $z = 3$ und $y = 2$, so erhält man $x = 1$.

Beispiel II.

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{5x + 7y}{x + y} = 6 \\[2ex] 2)\ \dfrac{3(z - x)}{x - y + z} = 1 \\[2ex] 3)\ \dfrac{2x + 3y - z}{\dfrac{x}{2} + 3} = 4. \end{cases}$$

Aus 1) erhält man $5x + 7y = 6x + 6y$, oder $x = y$.

Setzt man nun in den Gleichungen 2) und 3) überall y statt x, so erhält man:

aus 2) $$\frac{3(z - y)}{z} = 1,$$

oder $3z - 3y = z$,

oder $2z = 3y$, (a)

ferner aus 3) $$\frac{2y + 3y - z}{\dfrac{y}{2} + 3} = 4,$$

oder $5y - z = 2y + 12$,

oder $3y = z + 12$. (b)

Es ist also: $3y = 2z$ (nach a),

$3y = z + 12$ (nach b),

daher $2z = z + 12$,

$z = 12$.

Aus $3y = 2z = 24$ folgt, daß $y = 8$, und aus $x = y$ folgt, daß $x = 8$ ist.

Aufgaben.

I. Gegebene Gleichungen.

1) $\begin{cases} 3x + 5y = 27 \\ 7x + 4y = 40; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - 8y = -12 \\ 3x - 5y = -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 8y = 34 \\ -3x + 4y = -18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (3x + 5)\,3 = 4y + 2 \\ 2x + 3y = 36; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{4x}{3} + \frac{5y}{4} = 6 \\ \frac{5x}{6} - \frac{3y}{2} = 22; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{5x + 4y}{3} - 3 = 10 \\ \frac{4x + 9y - 6}{5} = 12; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x + 3y = 5x + 3 - 3y \\ (6x + 2) : (2y + 1) = 4 : 1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x + 7y = 8x - 3y + 25 \\ \left(2x + \frac{1}{2}\right) : (y + 3) = 1 : 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4x + 3y = 8x + y - 6 \\ 3\frac{4}{5}\,x + 5\frac{3}{7}\,y = 57; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x + 2y - [3x + 2(y - 3x)] + x - 5(y + 2x - 3) = 24 \\ -(8y + 5x + 6) + 8(3x + 4y) - [6 - (3x + 2y)] = -24; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 4x + 3(x - y) - 2(x - 3y) + 468 = 8(x + 5y) \\ 3x + 120 - 7(x + y - 2) = 2 - (8 - 2y); \end{cases}$

12) $\begin{cases} (x + 3)(2y - 4) - \frac{1}{2}(y - 7)(4x + 8) = 10(x + y) \\ 4x + 2y = 6y - (x - 2); \end{cases}$

13) $\begin{cases} (x - 3)(y - 5) - 3(2x + 3y - 16) = (2 - x)(4 - y) - \frac{3y + 2x}{3} \\ 2x - y = 2; \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x + \frac{4y - 2}{3} \cdot \frac{5 - 3x}{4} + x(y + 2) = \frac{3}{4}(5x + 3y - 2) + 1\frac{1}{4} \\ 1\frac{1}{5}(x + 5) : \frac{4y + 4}{5} = 2 : 1; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x - \frac{3y + 4x}{7} + 4 = 3x + 2y \\ \frac{5y - (3x + 2)}{4} + 4x - 7 = \frac{y - 13}{4}; \end{cases}$

16) $\begin{cases} 4x - \left[6 + \frac{3x - 4}{2} - (y + 3)\right] = 7 \\ (3x + 5) : (10y + 3) = 1 : 3; \end{cases}$

(21)

17) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8} \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 1\frac{3}{8}; \end{cases}$

† 18) $\begin{cases} \frac{3}{4x + 5y - 10} + \frac{8}{9x - 7y + 4} = -7\frac{1}{4} \\ \frac{7}{4x + 5y - 10} - \frac{11}{9x - 7y + 4} = 12\frac{3}{4}; \end{cases}$

† 19) $\begin{cases} \frac{2}{3x - 4y + 1} + \frac{5}{7x - 6y - 6} = 2\frac{1}{4} \\ \frac{15x - 20y + 5}{2} + \frac{56x - 48y}{5} = 9\frac{3}{5}; \end{cases}$

† 20) $\begin{cases} (\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) : (4\sqrt{y} - 3\sqrt{x}) = 11 : 7 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{y} + 4; \end{cases}$

† 21) $\begin{cases} \frac{2x}{3y} + 5x - 8 = -\frac{y}{x} + 1\frac{2}{3} + y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7x - 5y + 2\sqrt{xy}}; \end{cases}$

† 22) $\begin{cases} \sqrt{x + 3y + 9} = \sqrt{x + 3y + 22} - 1 \\ 3x - \frac{3y + 5}{2} - \frac{y + 1}{4} = \frac{x}{2}; \end{cases}$

† 23) $\begin{cases} 3x - \frac{bf}{b - f} \cdot \frac{8b - 2f}{b + f} = -5y \\ (b + c + f)\,fy - (b + 2f) \,.\, bf + b^2x = f^2x + \frac{bcf^2}{b + f}; \end{cases}$

24) $\begin{cases} \frac{a}{b + y} = \frac{b}{3a + x} \\ ax + 2by = d; \end{cases}$

25) $\begin{cases} (x + a) : (y + b) = c : d \\ (x - a) : (y - b) = m : p; \end{cases}$

26) $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{x}} : \frac{b}{\sqrt{y}} = c : d \\ x - y = m; \end{cases}$

27) $\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \\ \frac{c}{x} - \frac{a}{y} = b; \end{cases}$

28) $\begin{cases} \frac{a}{m + px} = \frac{b}{n - py} \\ \frac{ax}{my} - c = b - \frac{x}{y}; \end{cases}$

29) $\begin{cases} \frac{(x + a)(cy - b)}{c} = (x - d)\,y \\ ay = \frac{bx}{c}; \end{cases}$

30) $\begin{cases} bcx = cy - 2b \\ b^2y + \frac{a(c^3 - b^3)}{bc} = \frac{2b^3}{c} + c^3x; \end{cases}$

31) $\begin{cases} 3x + 2y = 24 \\ 5x + 2z = 24 \\ 3y - 5z = 8; \end{cases}$

32) $\begin{cases} 8x - 3y = 23 \\ 5x - 9z = 2 \\ 3z + 8y = 30; \end{cases}$

33) $\begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{7y}{2} = -38 \\ \frac{3y}{4} + \frac{5z}{3} = 39 \\ \frac{8y}{3} - \frac{7z}{2} = -31; \end{cases}$

34) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - 8y = -13 \\ 4x - 3y = -2; \end{cases}$

35) $\begin{cases} x + y + z = -1\frac{1}{2} \\ 5x + 3y = -21\frac{1}{2} \\ 2x - 5z = -25; \end{cases}$

36) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = -21 \\ 4x + 3y - 6z = 30 \\ 5x - 6y + 8z = -79; \end{cases}$

37) $\begin{cases} 2x - \frac{y}{2} + 4z = 13 \\ \frac{5x}{4} + y - z = \frac{1}{4} \\ 3x + 4y - \frac{5z}{6} = \frac{17}{2}; \end{cases}$

38) $\begin{cases} 5x - 2y + \frac{5}{6}z = 15 \\ 3\frac{1}{6}x - 4\frac{1}{5}y - 2z = -79 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{10}y + \frac{5}{12}z = 1; \end{cases}$

39) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{6}{z} = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} + \frac{1}{4z} = 2\frac{5}{6}; \end{cases}$

40)† $\begin{cases} \frac{6}{5x - 4y + z} - \frac{5}{3x + 7y - 5z} = 2 \\ \frac{7}{5x - 4y + z} + \frac{8}{3x + 7y - 5z} - 5\frac{1}{10} \\ 6x - 5y = 1; \end{cases}$

41) $\begin{cases} 4x : 5y : 3z = 4 : 10 : 9 \\ 3x + 4y - 6z = -14; \end{cases}$

42) $\begin{cases} \frac{4x - 3y + 2z}{3\frac{1}{2}x + y - 3} = 1 \\ \frac{5(2z - 3x)}{3x - 2y + 2\frac{1}{2}z} = 1 \\ \frac{3x - 8y}{4y + 3x} = -1; \end{cases}$

43) $\begin{cases} x^2 - 5(x + y) = y^2\left(\frac{y + 5}{x}\right) \\ \frac{x - 5}{z} = \frac{z + 5}{x} \\ 3x - 3z = 5y + 10; \end{cases}$

44) $\begin{cases} ax + by + cz = h \\ a'x + b'y + c'z = h' \\ a''x + b''y + c''z = h''; \end{cases}$

45) $\begin{cases} \sqrt{x} : \sqrt{y} : \sqrt{z} = a : b : c \\ x + y + z = d; \end{cases}$

46) $\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = m \\ \frac{a'}{x} + \frac{b'}{y} + \frac{c'}{z} = m' \\ \frac{a''}{x} + \frac{b''}{y} + \frac{c''}{z} = m''; \end{cases}$

47) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 3z = -4 \\ 9y - 4v = 7 \\ 2z + 3v = 23; \end{cases}$

48) $\begin{cases} 2x + 3y - 3z + 2v = 10 \\ 8x - 6y + 4z - 3v = 11 \\ 5x + 4y - 5z + 2v = 12 \\ 4x + 2y + 3z - 6v = 3; \end{cases}$

49) $\begin{cases} \frac{x - 2y}{4} - \frac{z}{10} + \frac{u - 2y}{3} = \frac{4z - 5y}{2} \\ \frac{2x - 5y}{3} - \frac{2z - x + u}{4} + \frac{2y}{3} = 4 \\ \frac{3x - 6z}{4} = 2u - 3y - 24 \\ x + y + z + u = 162; \end{cases}$

50) $\begin{cases} ax + by = k \\ cx + du = m \\ ex + fz = n \\ gy + hz = p; \end{cases}$

51) $\begin{cases} \frac{xy}{ay + bx} = k \\ \frac{yz}{cz + dy} = m \\ \frac{xz}{ez + fx} = n. \end{cases}$

II. Aufgaben, für welche die Gleichungen erst gesucht werden müssen.

52) Der Umfang eines rechtwinkligen viereckigen Gartens beträgt 640′; die Breite beträgt 40′ mehr als die Länge. Wie lang und wie breit ist der Garten?

53) Wie lang und wie breit ist ein Garten, dessen Umfang 2a beträgt, und dessen Breite um b größer als die Länge ist?

54) Zwischen zwei Grundstücken liegt eine Wiese von 12 Morgen. Kauft der Besitzer des einen Grundstücks dieselbe, so wird dadurch sein Grundstück dreimal so groß, als das des andern; kauft jedoch letzterer die Wiese, so beträgt alsdann sein Grundstück $^3/_5$ von dem des erstern. Wie groß sind beide Grundstücke?

55) Von zwei Stücken Zeug wurden verschiedene Ellen verkauft. Nachdem von dem ersten 18 Ellen und von dem andern 10 Ellen verkauft worden waren, verhielten sich die Reste wie $1^1/_2$ zu 1; nachdem aber von dem ersten noch 10 und vom zweiten noch 20 Ellen verkauft worden waren, verhielten sich die Reste wie 2 : 1. Wie viel Ellen enthielt jedes Stück?

56) Von zwei Zahlen giebt das Dreifache der größeren und das Vierfache der kleineren die Summe 96; die Summe der beiden Zahlen dividirt durch die Differenz derselben giebt 7. Welches sind die Zahlen?

57) Die monatliche Miethe für zwei Wohnungen zusammen beträgt 80 Thlr. Wie viel beträgt die jährliche Miethe für jede dieser Wohnungen, wenn die erste jährlich 96 Thlr. weniger kostet, als die andere in 10 Monaten?

58) Für 12 Scheffel Roggen und 2 Wispel Weizen werden 110 Thlr. bezahlt. Was kostet von beiden der Scheffel, wenn 5 Scheffel Roggen 5 Sgr. weniger kosten, als 3 Scheffel Weizen?

59) Das Dreifache einer Zahl ist um 7 kleiner, als das Fünffache einer andern; hingegen ist das Vierfache der zweiten um 10 kleiner, als das Fünffache der ersten. Welches sind die beiden Zahlen?

60) Jemand zieht von seinem Hause, welches einen Werth von 10000 Thlr. hat, nach Abzug der Zinsen für 2400 Thlr. Schulden, die auf dem Hause stehen, jährlich 404 Thlr. Zinsen. Bei gleichem Zinsfuße zieht sein Nachbar für ein Haus im Werthe von 20000 Thlr. nach Abzug der Zinsen für 8000 Thlr. Schulden jährlich 680 Thlr. Wie viel beträgt der Zinsfuß für die Häuser und wie viel für die Schulden?

61) Jemand zieht von seinem Hause, welches einen Werth von 16000 Thlr. hat, nach Abzug der Zinsen für 5000 Thlr. Schulden jährlich 600 Thlr. Zinsen. Sein Nachbar besitzt ein Haus im Werthe von 20000 Thlr., welches ihm nach Abzug der Zinsen für 8000 Thlr. Schulden jährlich 800 Thlr. einbringt, so daß es sich um 1 % besser verzinst, als das des Nachbarn, obgleich auch die 8000 Thlr. Schulden um 1 % höher verzinst werden, als die Schulden des anderen. Wie viel beträgt der Zinsfuß für die Häuser und wie viel für die Schulden?

62) Welcher Bruch wird gleich $^3/_4$, wenn man zum Zähler und zum Nenner 5 addirt, hingegen gleich $^8/_{11}$, wenn man 3 vom Zähler und auch vom Nenner subtrahirt?

63) Welcher Bruch wird gleich 2, wenn man 8 zum Zähler und Nenner addirt, hingegen gleich 3, wenn man 3 zum Zähler und Nenner addirt?

64) Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 7, zwei andere wie 3 : 5. Addirt man die zwei kleineren Zahlen aus beiden Verhältnissen, ebenso die zwei größeren, so haben die entstandenen Summen das Verhältniß 9 : 13 und den Unterschied 16. Welche Zahlen sind es?

65) Eine Gesellschaft verzehrte in einem Gasthause eine gewisse Summe, und zwar ein Mitglied so viel als das andere. Wären 5 Personen mehr gewesen, und hätte jede $3^3/_4$ Sgr. mehr verzehrt, so hätte die Zeche 6 Thlr. $16^1/_4$ Sgr. mehr betragen; wären aber 3 Personen weniger gewesen, und hätte jede $2^1/_2$ Sgr. weniger verzehrt, so hätte die Zeche 3 Thlr. $12^1/_2$ Sgr. weniger betragen. Wie stark war die Gesellschaft, und wie viel verzehrte jedes Mitglied?

66) Ein Garten von der Form eines Rechtecks würde um 116 Quadratruthen größer sein, wenn er 5° breiter und 4° länger wäre; hingegen würde er um 113 Quadratruthen größer sein, wenn er 4° breiter und 5° länger wäre. Wie lang und wie breit ist der Garten?

67) Ein Garten von der Form eines Rechtecks würde um c Quadratruthen größer sein, wenn er a Ruthen länger und b Ruthen breiter wäre; hingegen würde er um c′ Quadratruthen größer sein, wenn er a′ Ruthen länger und b′ Ruthen breiter wäre. Wie lang und wie breit ist der Garten?

68) A und B spielen zusammen. Beim ersten Spiele gewinnt B so viel, daß sich seine Baarschaft verdoppelt, beim zweiten A so viel, daß sich der

ihm gebliebene Rest verdoppelt, und beim dritten wieder B so viel, daß sich der ihm gebliebene Rest verdoppelt. Zuletzt hat jeder 16 Thlr. Wie viel hatte jeder anfangs?

69) Wie viel hatte jeder anfangs, wenn zuletzt jeder a Thlr. hatte?

70)† Zwei Wettrenner A und B laufen nach einem 660′ entfernten Ziele. Zuerst läuft A aus; nach 4 Secunden folgt B mit größerer Geschwindigkeit, holt nach einem Laufe von 12 Secunden A ein, erreicht das Ziel und trifft, mit derselben Geschwindigkeit zurückkehrend, nach 24 Secunden wieder mit A zusammen. Mit welcher Geschwindigkeit laufen beide Renner?

71)† Zwei Körper A und B gehen aus zwei Punkten, deren Entfernung 600′ beträgt, mit gleichförmiger, aber bei beiden verschiedener Geschwindigkeit einander entgegen, treffen sich nach 20 Minuten und gehen weiter. A langt an dem zweiten Endpunkte an, kehrt um und holt nach wiederum 10 Minuten den Körper B ein, ehe dieser den anderen Endpunkt erreicht hat. Wie groß war die Geschwindigkeit beider Körper?

72) 21 Pfund Silber verlieren im Wasser 2 Pfund, 9 Pfund Kupfer 1 Pfund ihres Gewichts. Wenn nun eine Composition aus Silber und Kupfer, welche 148 Pfund wiegt, $14\frac{2}{3}$ Pfund im Wasser verliert, wie viel Silber und Kupfer enthält dieselbe?

73) Die Krone des Königs Hiero wog 20 Pfund, bestand aus Silber und Gold und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund ihres Gewichts. Wenn nun 19,64 Pfund Gold im Wasser 1 Pfund, 10,5 Pfund Silber im Wasser ebenfalls 1 Pfund verlieren, wie viel Gold und wie viel Silber mußte dann die Krone enthalten?

74) Ein Stück Metall, welches p Pfund wiegt, verliert im Wasser a Pfund seines Gewichts. Wenn es nun aus zwei andern Metallen besteht, und p Pfund des erstern im Wasser b Pfund, p Pfund des zweiten im Wasser c Pfund verlieren, wie viel Pfund von jedem dieser Metalle befinden sich alsdann in dem gegebenen Stücke?

75) Das Blei ist 11,324 mal schwerer als Wasser; das Korkholz wiegt nur 0,24 mal so viel als Wasser; das Tannenholz hingegen wiegt 0,45 mal so viel als Wasser. Man will nun ein Stück Blei mit einem Stück Korkholz so verbinden, daß dadurch ein Körper entsteht, der 80 Pfund wiegt und gerade so schwer ist, als ein Stück Tannenholz von gleicher Größe. Wie viel Blei und Korkholz muß miteinander verbunden werden?

76) Wenn das Blei p mal, das Korkholz p′ mal, das Tannenholz p″ mal so schwer als Wasser ist, wie viel Blei und Kork müssen dann verbunden werden, wenn diese Masse q Pfund wiegen und durchschnittlich so schwer als Tannenholz sein soll?

77)† Ein Kapital von 1400 Thlr. ist in zwei getrennten Summen zu verschiedenen Zinsfußen ausgeliehen; der eine Theil bringt jährlich 24 Thlr., der zweite jährlich 30 Thlr. Zinsen. Ein zweites Kapital von 1800 Thlr. ist ebenfalls in zwei getrennten Summen zu denselben Zinsfußen ausgeliehen; der eine Theil bringt jährlich 30 Thlr., der andere 40 Thlr. Zinsen. Welche Zinsfuße sind es?

78) Ein Kapital von 5000 Thlr. wurde in zwei getrennten Summen verliehen, die kleinere zu einem um 2 % höheren Zinsfuße. Der Zinsfuß der größern Summe wurde später um 1 % vermehrt, und der der kleinern um 1 % vermindert. Dadurch vermehrte sich der ganze Zinsenertrag um den vierten Theil. Wäre aber der Zinsfuß der größern Summe um 1 % erhöhet, der Zinsfuß der kleinern unverändert gelassen worden, so wäre

der ganze Zinsenertrag um ein Drittel gestiegen. Welche Summen waren es, und zu welchem Zinsfuße waren sie verliehen?

79) Zwei Röhren können einen Wasserbehälter zusammen in 15 Stunden füllen. Nachdem sie 6 Stunden lang in Thätigkeit gewesen sind, wird die eine Röhre abgesperrt, und die andere braucht nun noch 30 Stunden, um den Behälter zu füllen. Wie viel Stunden braucht jede Röhre, um allein den Behälter zu füllen?

80) Ein cylindrisches senkrechtes Gefäß von 27 Fuß Höhe kann durch zwei Oeffnungen, welche sich wie 5 zu 4 verhalten, und von denen die eine am Boden, die andere an der Seite befindlich ist, entleert werden. Als das Gefäß ganz gefüllt war, brauchte es $6^1/_3$ Minute, um sich ganz zu entleeren. Durch die untere Oeffnung lief dabei in zwei Minuten $^1/_3$ von dem, was aus beiden Oeffnungen gleichzeitig überhaupt auslaufen konnte. In welcher Höhe über dem Boden befand sich die zweite Oeffnung?

81)† Ein Teich von 150000 Kubikfuß Inhalt kann durch zwei Schleusen gefüllt werden, wenn die erste 7, die zweite 12 Stunden geöffnet ist, und es liefert dabei die erste Schleuse in 4 Stunden 3000 Kubikfuß weniger, als die zweite in 3 Stunden. In welcher Zeit wird der Teich gefüllt, wenn beide Schleusen gleich lange geöffnet sind?

82) Bei einem Garten von der Form eines Rechtecks verhält sich der Unterschied zweier Seiten zum Umfange wie 1 : 6 und die Umfangszahl zur Inhaltszahl wie 1 : 20. Wie lang und wie breit ist der Garten?

83) Wie lang und wie breit ist derselbe, wenn sich der Unterschied zweier Seiten zum Umfange wie $m : n$ und die Umfangszahl zur Inhaltszahl wie $v : w$ verhält?

84) Die Summe zweier Zahlen beträgt 12, der Unterschied ihrer Quadrate 72. Welches sind die Zahlen?

85) Die Summe zweier Zahlen ist a, der Unterschied ihrer Quadrate gleich b. Welches sind die Zahlen?

86) Die Summe zweier Zahlen beträgt a, ihr Quotient ist gleich b. Welches sind die Zahlen?

87) Wenn A so viel Thaler besitzt als B und noch den dritten Theil von dem, was C besitzt; B hingegen so viel als C und noch $^1/_3$ von dem, was A besitzt; C endlich $^1/_3$ von dem, was A besitzt und außerdem 10 Thlr., wie viel hat alsdann jeder?

88) Giebt A an B 4 Thlr., so verhält sich ihre Baarschaft wie 1 : 2; giebt hingegen B an C 10 Thlr., so verhält sich ihre Baarschaft wie 3 : 10; giebt endlich A an C 5 Thlr., so verhält sich ihre Baarschaft wie 3 : 11. Wie viel besitzt jeder?

89) Verborgt Jemand von seinem Gelde einen Theil zu 3 %, einen andern Theil zu 4 % und den Rest zu 5 %, so erhält er jährlich 245 Thlr. Zinsen; verborgt er den ersten Theil zu 4 %, den zweiten zu 3 %, den dritten zu 5 %, so erhält er jährlich 250 Thlr. Zinsen; verborgt er den ersten zu 5 %, den zweiten zu 3 % und den dritten zu 4 %, so erhält er jährlich 245 Thlr. Zinsen. Welches sind die drei Theile?

90) A und B erhalten für 15 Tage gemeinschaftlicher Arbeit zusammen 22 Thlr.; A und C für 20 Tage zusammen 31 Thlr.; B und C für 12 Tage zusammen 17 Thlr. Wie viel erhält jeder täglich?

91) Drei Kapitalien betragen zusammen 10500 Thlr.; das eine ist zu 5 %, das andere zu 4 %, das dritte zu 3 % ausgeliehen. Die Zinsen betragen

zusammen 399 Thlr., und zwar die Zinsen vom zweiten Kapitale 2 Thlr. weniger, als vom ersten. Wie groß ist jedes Kapital?

92) Ein Kaufmann hat drei Sorten Tuch; 192 Ellen der ersten, 72 Ellen der zweiten und 120 Ellen der dritten kosten zusammen 734 Thlr.; 72 der ersten, 240 der zweiten und 168 der dritten 812 Thlr.; 144 der ersten, 216 der zweiten und 312 der dritten 1130 Thlr. Wie viel kostet die Elle von jeder Sorte?

93) Ein Stück Metall, welches aus Gold, Silber und Kupfer bestand, wog 1700 Loth, im Wasser aber nur 1556 Loth. Wenn nun das Gold $5^1/_4\,^0/_0$, das Silber $9^1/_2\,^0/_0$ und das Kupfer $12^4/_5\,^0/_0$ im Wasser verliert, und wenn sich der Gewichtsverlust des in der Mischung befindlichen Silbers zum Gewichtsverluste des in der Mischung befindlichen Kupfers wie 19 : 32 verhielt, wie viel von jedem Metalle war dann in der Mischung?

94) Jemand hat drei Stücke Metall, von denen jedes aus Gold, Silber und Kupfer besteht. Das erste Stück enthält 5 Loth Gold, 15 Loth Silber und 30 Loth Kupfer, das zweite 20 Loth Gold, 28 Loth Silber und 48 Loth Kupfer, das dritte 12 Loth Gold, 39 Loth Silber und 24 Loth Kupfer. Wie viel muß er von jedem Stücke hinwegnehmen, um ein viertes Stück daraus zu bilden, welches 10 Loth Gold, 23 Loth Silber und 26 Loth Kupfer enthalten soll?

95) Drei Arbeiter sollen eine Arbeit übernehmen. A und B würden dieselbe gemeinschaftlich in 12 Tagen vollenden, B und C erst in 20 Tagen, A und C in 15 Tagen. Wie viel Zeit wird jeder einzelne dazu brauchen, und in welcher Zeit werden sie bei gemeinschaftlicher Arbeit dieselbe beenden?

96) Drei Arbeiter sollen eine Arbeit übernehmen. A und B würden dieselbe in a Tagen, A und C in b Tagen, B und C in c Tagen vollenden. Wie viel Zeit wird jeder einzelne dazu brauchen, und in wie viel Tagen werden sie bei gemeinschaftlicher Arbeit dieselbe beenden?

97)† Ein Wasserbehälter ist unvollständig gefüllt und kann durch die eine von drei Röhren in $3^1/_3$, durch die zweite in 4, durch die dritte in 5 Stunden entleert werden. Wenn aber, während die erste Röhre geöffnet ist, gleichzeitig durch eine vierte Röhre in der Stunde 45 Kubikfuß zufließen, so füllt sich der Behälter in 20 Stunden, und wenn die zweite und die vierte Röhre gleichzeitig geöffnet sind, so füllt er sich in 15 Stunden. Wie viel Kubikfuß faßt der volle Behälter?

98) In einer Gesellschaft waren so viel Männer und Frauen und Kinder, daß, wenn auch nur auf je 8 Erwachsene 1 Kind gerechnet wurde, doch 30 Erwachsene übrig blieben; dabei war der 13te Theil der Frauen dem 12ten der Männer und Kinder gleich. Als die Hälfte der Frauen und $^2/_3$ der Kinder sich entfernt hatten, fehlten noch 2 Frauen, um auf je 8 Frauen ein Kind rechnen zu können. Wie viel Männer, Frauen und Kinder waren zugegen?

99) Ein Kriegsschiff war vollständig bemannt mit Matrosen und Seesoldaten. Wenn auf je 3 Kanonen 22 Matrosen gerechnet wurden, so blieben 10 Matrosen übrig. Die Zahl der ganzen Mannschaft war 5mal größer, als die Zahl der Soldaten und Kanonen zusammengenommen. Nach einem Treffen, worin die Anzahl der Getödteten den vierten Theil der Ueberlebenden betrug, fehlten noch 5, um auf je 2 Kanonen 13 Mann zu rechnen. Wie viel Kanonen, Soldaten und Matrosen waren es?

100) Um zwei Räder, deren Umfänge sich verhalten wie 5 : 3, sind zwei Seile geschlagen, deren Differenz um 280 Ellen größer ist, als die Differenz der Umfänge. Das längere Seil läßt sich 12 mal so oft um das größere Rad wickeln, als das kürzere Seil um das kleine Rad; und wenn das große Rad sich 3 mal so schnell umdreht, als das andere, so wickeln sich die Seile zu gleicher Zeit ab. Wie lang sind die Seile, und wie groß sind die Umfänge der Räder?

101) Fünf Spieler machen die Bedingung, daß derjenige, der verliert, allen übrigen so viel geben muß, als sie schon haben. Zuerst verliert A, dann B, dann C, dann D, endlich E. Am Ende des fünften Spieles hatte jeder 160 Thlr. Wie viel hatte jeder vor dem Spiele?

102) Der Name einer gewissen Stadt wird mit 6 Buchstaben geschrieben. Bezeichnet man die Buchstaben durch die Zahlen, welche ihre Stelle im Alphabet anzeigen, so ist die Summe dieser Zahlen mit Ausschluß der ersten gleich 55, mit Ausschluß der zweiten gleich 52, mit Ausschluß der dritten gleich 40, mit Ausschluß der vierten gleich 46, mit Ausschluß der fünften gleich 48 und mit Ausschluß der letzten gleich 44. Welches ist der Name der Stadt?

Auflösungen.

1) $x=4,\ y=3$; **2)** $x=5,\ y=4$; **3)** $x=2,\ y=-3$;

4) $x=3,\ y=10$; **5)** $x=12,\ y=-8$; **6)** $x=3,\ y=6$;

7) $x=3,\ y=2$; **8)** $x=\frac{5}{4},\ y=3$; **9)** $x=5,\ y=7$;

10) $x=3,\ y=-3$; **11)** $x=8,\ y=12$; **12)** $x=2,\ y=2$;

13) $x=3,\ y=4$; **14)** $x=\frac{5}{3},\ y=4$; **15)** $x=1,\ y=1$;

16) $x=2,\ y=3$; **17)** $x=4,\ y=8$; **18)** $x=1,\ y=2$;

19) $x=\frac{274}{75},\ y=\frac{937}{300}$; **20)** $x=9,\ y=16$; **21)** $x=2,\ y=2$;

22) $x=6,\ y=7$; **23)** $x=\frac{bf}{b-f},\ y=\frac{bf}{b+f}$;

24) $x=\frac{2b^2+d-6a^2}{3a},\ y=\frac{3a^2+d-b^2}{3b}$;

25) $x=\frac{2bcm-adm-apc}{dm-pc},\ y=\frac{bdm+bcp-2adp}{dm-pc}$;

26) $x=\frac{a^2d^2m}{a^2d^2-b^2c^2},\ y=\frac{b^2c^2m}{a^2d^2-b^2c^2}$;

27) $x=\frac{a^2+bc}{b^2+ac},\ y=\frac{a^2+bc}{c^2-ab}$;

28) $x = \frac{m(b+c)(an-bm)}{pbm(b+c)+pa(a+m)}$, $y = \frac{(a+m)(an-bm)}{pbm(b+c)+pa(a+m)}$;

29) $x = \frac{a^2}{d}$, $y = \frac{ab}{cd}$; 30) $x = \frac{a}{bc}$, $y = \frac{a+2b}{c}$; 31) $x = 4$, $y = 6$, $z = 2$;

32) $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$; 33) $x = 10$, $y = 12$, $z = 18$; 34) $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$;

35) $x = -2\frac{1}{2}$, $y = -3$, $z = 4$; 36) $x = -3$, $y = 4$, $z = -5$;

37) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; 38) $x = 12$, $y = 25$, $z = 6$; 39) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$;

40) $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$; 41) $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$; 42) $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$;

43) $x = 6$, $y = 1$, $z = 1$;

44) $x = (hb'c'' - hb''c' + h'b''c - h'bc'' + h''bc' - h''b'c) \,.\, m$,
$y = (ah'c'' - ah''c' + a'h''c - a'hc'' + a''hc' - a''h'c) \,.\, m$,
$z = (ab'h'' - ab''h' + a'b''h - a'bh'' + a''bh' - a''b'h) \,.\, m$;
$m = 1 : (ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c)$;

45) $x = \frac{a^2d}{a^2+b^2+c^2}$, $y = \frac{b^2d}{a^2+b^2+c^2}$, $z = \frac{c^2d}{a^2+b^2+c^2}$;

46) $x = A : (mb'c'' - mb''c' + m'b''c - m'bc'' + m''bc' - m''b'c)$,
$y = A : (am'c'' - am''c' + a'm''c - a'mc'' + a''mc' - a''m'c)$,
$z = A : (ab'm'' - ab''m' + a'b''m - a'bm'' + a''bm' - a''b'm)$;
$A = (ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c)$;

47) $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, $v = 5$; 48) $x = 3$, $y = 3$, $z = 5$, $v = 5$;

49) $x = 60$, $y = 24$, $z = 30$, $u = 48$;

50) $x = \frac{bhn + (gk - bp)f}{beh + afg}$, $y = \frac{afp + (ek - an)h}{beh + afg}$,

$z = \frac{bep + (an - ek)g}{beh + afg}$, $u = \frac{bh(em - cn) + gf(am - ck) + bcfp}{d(beh + afg)}$;

51) $x = A : (cfmn - bfln + bdlm)$, $y = A : (afln + demn - adlm)$,
$z = A : (beln - cemn + aclm)$, $A = lmn(bde + acf)$;

52) Breite $= 180'$, Länge $= 140'$; 53) Breite $= \frac{a+b}{2}$, Länge $= \frac{a-b}{2}$;

54) I. = 60 Morgen, II. = 24 Morgen; 55) I. = 108 Ellen, II. = 70 Ellen;

56) 16 und 12; 57) 576 Thlr. und 384 Thlr.; 58) 2 Thlr. und $1\frac{1}{6}$ Thlr.;

59) 6 und 5; 60) Für die Häuser 5 %, für die Schulden 4 %;

61) Für die Häuser 5 % und 6 %, für die Schulden 4 % und 5 %; 62) $\frac{67}{91}$; 63) $\frac{12}{2}$;

64) 30, 42, 6, 10; **65)** 14 Personen, 25 Sgr.; **66)** 12 R. lang, 9 R. breit;

67) Länge $= \frac{a'c - ac' + aa'(b' - b)}{a'b - ab'}$, Breite $= \frac{bc' - b'c + bb'(a - a')}{a'b - ab'}$ Ruthen;

68) 22 Thlr., 10 Thlr.; **69)** $\frac{11}{8}a$, $\frac{5}{8}a$;

70) A 15 Fuß, B 20 Fuß in der Secunde;

71) A 25 Fuß, B 5 Fuß in der Minute; **72)** 112 Pfd. Silber, 36 Pfd. Kupfer

73) 14,77... Pfd. Gold, 5,22... Pfd. Silber;

74) $\frac{(c - a)p}{c - b}$ Pfd. vom ersten und $\frac{(a - b)p}{c - b}$ Pfd. vom zweiten;

75) 38,14... Pfd. Blei mit 41,85... Pfd. Kork;

76) $\frac{q(p' - p'')}{p''(p' - p)}$ Pfd. Blei und $\frac{qp'(p'' - p)}{p''(p' - p)}$ Pfd. Kork;

77) Das erste zu 4%, das andere zu $4\frac{1}{2}$%;

78) 1000 Thlr. zu 4%, 4000 Thlr. zu 2%;

79) Die erste in $21\frac{3}{7}$, die andere in 50 Stunden;

80) 9 Fuß über dem Boden; **81)** In 10 Stunden;

82) Die eine Seite ist 60, die andere 120;

83) Die eine Seite ist $\frac{4nw}{(n + 2m)v}$, die andere $\frac{4nw}{(n - 2m)v}$;

84) 9 und 3; **85)** $\frac{a^2 + b}{2a}$ und $\frac{a^2 - b}{2a}$; **86)** $\frac{a}{b + 1}$ und $\frac{ab}{b + 1}$;

87) A 60 Thlr., B 50 Thlr., C 30 Thlr.; **88)** A 20 Thlr., B 28 Thlr., C 50 Thlr.;

89) 2000 Thlr., 1500 Thlr., 2500 Thlr.; **90)** A $\frac{4}{5}$, B $\frac{2}{3}$, C $\frac{3}{4}$ Thlr.;

91) 2600 Thlr., 3200 Thlr., 4700 Thlr.;

92) I. $= 2\frac{1}{3}$ Thlr., II. $= 1\frac{3}{4}$ Thlr., III. $= 1\frac{1}{3}$ Thlr.;

93) 800 Loth Gold, 400 Loth Silber, 500 Loth Kupfer;

94) Vom ersten 10, vom zweiten 24, vom dritten 25 Loth;

95) A braucht 20, B 30, C 60 Tage; alle drei brauchen 10 Tage;

96) A braucht $\frac{2abc}{bc + ac - ab}$ Tage, B $\frac{2abc}{bc + ab - ac}$ Tage, C $\frac{2abc}{ab + ac - bc}$ Tage;

gemeinschaftlich brauchen sie $\frac{2abc}{ab + ac + bc}$ Tage;

97) 400 Kubikfuß; **98)** 114 Männer, 156 Frauen, 30 Kinder;
99) 90 Kanonen, 670 Matrosen, 55 Soldaten;
100) Das eine Seil 360 Ellen, das andere 72 Ellen; der Umfang des einen Rades 20, des anderen 12 Ellen;
101) A 405, B 205, C 105, D 55, E 30 Thlr.; **102)** Berlin.

C. Von den quadratischen Gleichungen.

§. 145. Erklärung.

Eine Gleichung mit einer Unbekannten heißt quadratisch oder ist vom zweiten Grade, wenn sie bei geordneter Form die Unbekannte in der zweiten Potenz enthält. Ferner heißt

$x^2 = a$ eine geordnete rein quadratische,

$x^2 + ax = b$ eine geordnete unrein quadratische Gleichung.

Anm. Es kann (aus §. 135) als bekannt vorausgesetzt werden, in welcher Art eine quadratische Gleichung zu ordnen ist. Man erhält dabei zwar gewöhnlich die geordneten Gleichungen in der Form

$$ax^2 = b, \text{ oder}$$
$$ax^2 + bx = c,$$

jedoch kann man durch Dividiren mit dem Coefficienten a leicht die oben angegebenen Formen herstellen.

§. 146. Aufgabe.

Die rein quadratische Gleichung $x^2 = a$ nach x aufzulösen.

Auflösung. Aus $x^2 = a$ folgt $x = \sqrt{a}$.

Ist a negativ, so giebt es keinen reellen Werth von x, welcher der Gleichung genügte. Ist jedoch a positiv oder gleich Null, so bezeichnet $\sqrt{a}$ eine reelle Zahl.

Der Ausdruck $\sqrt{a}$ ist mehrdeutig zu nehmen und kann (§. 94) jedes der beiden Vorzeichen erhalten. Man giebt deshalb die Auflösung obiger Gleichung durch die Form $x = \mp \sqrt{a}$. Wird der mehrdeutige Ausdruck $\sqrt{a}$ in einer Rechnung wiederholt gebraucht, so kann man ihm zwar jedes der beiden Vorzeichen geben, muß aber das einmal gewählte für die ganze Rechnung beibehalten.

Anm. Der Ausdruck $\sqrt{a}$ hat jedenfalls zwei Werthe, aber auch nur zwei. Die Gleichung $x^2 = a$ oder $x^2 - a = 0$ hat nämlich dieselben Lösungen, wie die Gleichung $(x + \sqrt{a}) \cdot (x - \sqrt{a}) = 0$, weil $x^2 - a = (x + \sqrt{a}) \cdot (x - \sqrt{a})$ eine analytische Gleichung ist.

Der Ausdruck $(x + \sqrt{a}) \cdot (x - \sqrt{a})$ hat aber nur dann den Werth 0, wenn $x = \mp \sqrt{a}$ ist.

§. 147. Aufgaben.

Die nachfolgenden Gleichungen nach x aufzulösen.

I. $3x^2 + 8 - 6(4 - x^2) = 5 - 7(x^2 - 3) + 22.$

Es folgt $3x^2 + 8 - 24 + 6x^2 = 5 - 7x^2 + 21 + 22,$

$$16x^2 = 64,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x = \mp 2.$$

II. $3(x + 4)^2 + 6 = 114.$

Setzt man $x + 4 = z$, so ist

$$3z^2 + 6 = 114,$$

$$z^2 = 36,$$

$$z = \mp 6.$$

Es ist also $z = x + 4 = \mp 6,$

daher $x = -4 \mp 6 = -10$ oder $+ 2.$

§. 148. Aufgabe.

Die unrein quadratische Gleichung $x^2 + ax = b$ nach x aufzulösen.

Auflösung. Man sucht die Gleichung in eine rein quadratische zu verwandeln und zu dem Zweck den Ausdruck $x^2 + ax$ auf die Form eines Quadrates $(a^2 + 2ab + b^2)$ zu bringen. Letzteres geschieht, indem man $ax = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x$ setzt und auf beiden Seiten der Gleichung das Quadrat des Ausdrucks $\frac{a}{2}$ hinzuaddirt.

Aus $x^2 + ax = b$ folgt alsdann

$$x^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}, \text{ oder}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 4b}{4}.$$

Zieht man jetzt auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so ist

$$x + \frac{a}{2} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4b}, \text{ daher}$$

$$x = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Anm. Ist b positiv, so erhält man aus der Gleichung $x^2 + ax = b$ zwei reelle Werthe für x. Ist aber b negativ, so darf 4b, absolut genommen, nicht größer als a^2 sein, wenn der Ausdruck $\sqrt{a^2 + 4b}$ eine reelle Zahl bedeuten soll. Ist b negativ, ferner $a^2 + 4b = 0$, so erhält man $x = -\frac{a}{2} + 0$; es ist alsdann der Ausdruck $x^2 + ax - b$ ein vollständiges Quadrat.

§. 149. Aufgaben.

Die nachfolgenden Gleichungen nach x aufzulösen.

I. $$x^2 + 4x = 32.$$

Es folgt $x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 = 36$,

$$x + 2 = \mp 6,$$

$$x = -2 \mp 6 = \begin{cases} -8 \\ +4. \end{cases}$$

II. $$\frac{x}{3} + \frac{9}{x} + 4 = 2x + 2.$$

Es folgt $x^2 + 27 + 12x = 6x^2 + 6x$,

$$5x^2 - 6x = +27,$$

$$x^2 - \frac{6}{5}x = +\frac{27}{5}.$$

Alsdann ist $x = \frac{3}{5} \mp \sqrt{\frac{27}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$,

daher $x = +3$, oder $x = -\frac{9}{5}$.

III. $$x + \sqrt{x} = 72.$$

Setzt man $\sqrt{x} = z$, so ist $x = z^2$, also

$$x + \sqrt{x} = z^2 + z = 72,$$

folglich $z = \sqrt{x} = -\frac{2}{1} \mp \sqrt{72 + \frac{1}{4}} = \begin{cases} +8 \\ -9. \end{cases}$

IV. $$x^4 - 13x^2 = -36.$$

Setzt man $x^2 = z$, so ist $x^4 = z^2$, also

$$z^2 - 13z = -36,$$

$$z = \frac{13}{2} \mp \sqrt{36 + \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \begin{cases} +9 \\ +4. \end{cases}$$

Ist aber $z = \begin{cases} +9 \\ +4 \end{cases}$, so ist $x = \sqrt{z} = \begin{cases} \mp 3 \\ \mp 2. \end{cases}$

V. $$x^2 + 4x = -5.$$

Es folgt $x = -2 \mp \sqrt{4 - 5} = -2 \mp \sqrt{-1}.$

Es giebt also keine reelle Zahl, welche obiger Gleichung genügte.

§. 150. Zusatz.

Die geordnete quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ läßt sich auf eine sehr einfache Art lösen, wenn man im Stande ist, den Ausdruck $x^2 + ax + b$ in ein Produkt von der Form $(x + m)(x + n)$ zu verwandeln (Vergl. §. 36). Alsdann ist auch $(x + m)(x + n) = 0$, und für diese Gleichung erhält man unmittelbar die Resultate $-m$ und $-n$. Da z. B. $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$ ist, so genügen der Gleichung $x^2 + 8x + 15 = 0$ die Werthe -3 und -5.

Sind umgekehrt $-m$ und $-n$ die Lösungen der Gleichung

$x^2 + ax + b = 0$, so ist

1) $x^2 + ax + b = (x + m)(x + n)$,

2) $a = m + n$,

3) $b = m \cdot n$.

Die Auflösung der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ nach gewöhnlicher Art enthält also zugleich die allgemeine Auflösung der Aufgabe, den Ausdruck $x^2 + ax + b$ als ein Produkt von der Form $(x + m)(x + n)$

darzustellen, oder zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich a, und deren Produkt gleich b ist. (Vergl. §. 36.)

Anm. Die Gleichungen 2) und 3) lassen sich auch unmittelbar aus der in §. 148 erhaltenen Auflösung ableiten.

§. 151. Zusatz.

Eine Gleichung des ersten Grades kann zu einer quadratischen werden, wenn man beim Wegschaffen der Nenner die etwa möglichen Reductionen nicht ausführt. Von den zwei Lösungen der quadratischen Gleichung genügt alsdann nur die eine der gegebenen Gleichung, während die andere zu Ausdrücken von der Form $\frac{0}{0}$ führt. (Vergl. §. 132, 2).

Beispiel. Die Gleichung $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 8x + 12} = 4$ nach x zu lösen.

Auflösung. Entfernt man den Nenner durch Multiplication, so erhält man die Gleichung

$$x^2 + x - 6 = 4x^2 - 32x + 48, \text{ oder}$$

$$x^2 - 11x = -18,$$

und aus derselben die Lösungen $+ 9$ und $+ 2$.

Setzt man jedoch für x den Werth $+2$ in dem Ausdrucke $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 8x + 12}$ ein, so erhält letzterer den Werth $\frac{0}{0}$, muß sich folglich durch $x - 2$ kürzen lassen, und die gegebene Gleichung ist also nur scheinbar quadratisch. Es ist nun

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 8x + 12} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-6)} = \frac{x+3}{x-6},$$

und aus der Gleichung $\frac{x+3}{x-6} = 4$ ergiebt sich für x der Werth 9.

§. 152. Erklärung.

Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten heißt quadratisch, wenn sie bei geordneter Form das Quadrat einer Unbekannten, oder das Produkt zweier Unbekannten enthält.

Ist unter den Gleichungen, welche zur Bestimmung der Unbekannten dienen, bloß eine quadratisch, und sind die übrigen vom ersten Grade, so

drückt man mit Hülfe dieser letzteren die Werthe sämmtlicher Unbekannten durch ein und dieselbe Unbekannte aus, setzt diese Werthe in die erste (quadratische) Gleichung und erhält so eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten.

Sind aber mehrere der gegebenen Gleichungen quadratisch, so erhält man eine Eliminationsgleichung von höheren Graden. Eine solche ist nach dem Bisherigen nur in einzelnen Fällen zu lösen. (Vergl. §. 149, IV).

Zuweilen wird die Lösung dadurch erleichtert, oder möglich, daß man nicht die Unbekannten unmittelbar, sondern zunächst eine einfache Verbindung derselben, ihr Produkt, ihre Summe oder Differenz zu bestimmen sucht. Die Unbekannten haben in allen diesen Fällen mehr als zwei Werthe.

§. 153. Aufgaben.

Die nachfolgenden Gleichungen beziehlich nach x, y, z zu lösen.

I. $$\begin{cases} 1)\ x \cdot y = 8 \\ 2)\ x + y = 6. \end{cases}$$

Aus 2) erhält man $x = 6 - y$. Daher ist (nach 1)

$$(6 - y) \cdot y = 8, \text{ oder}$$

$$y^2 - 6y = -8.$$

Hieraus folgt $y = \begin{cases} +2 \\ +4, \end{cases} \quad x = \begin{cases} +4 \\ +2. \end{cases}$

II. $$\begin{cases} 1)\ x^2 + y^2 + z^2 = 90 \\ 2)\ 3x + 2y + 4z = 13x - 6 \\ 3)\ 4x + 3y - 2z = 3x + 15. \end{cases}$$

2) und 3) geordnet geben

$$\text{a)} \quad -5x + y + 2z = -3,$$

$$\text{b)} \quad x + 3y - 2z = 15.$$

Durch Addition erhält man aus a) und b)

$$-4x + 4y = 12,$$

daher $\underline{y = x + 3.}$

Setzt man diesen Werth in Gleichung b) statt y ein, so ist

$$x + 3x + 9 - 2z = 15,$$

daher $\underline{z = 2x - 3.}$

Setzt man nun die Werthe von y und z in Gleichung 1) ein, so ist

$$x^2 + (x + 3)^2 + (2x - 3)^2 = 90, \text{ oder}$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 12x + 9 = 90, \text{ oder}$$

$$6x^2 - 6x = 90 - 18 = 72, \text{ oder}$$

$$x^2 - x = 12, \text{ daher}$$

$$x = \begin{cases} -3 \\ +4. \end{cases}$$

Alsdann ist $y = x + 3 = \begin{cases} 0 \\ +7, \end{cases}$ $z = 2x - 3 = \begin{cases} -9 \\ +5. \end{cases}$

III.
$$\begin{cases} 1) \; x^2 + xy = 28 \\ 2) \; y^2 + xy = 21. \end{cases}$$

Erste Lösung. Addirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$x^2 + 2xy + y^2 = 49,$$
$$x + y = \mp 7. \quad (a)$$

Subtrahirt man beide Gleichungen, so erhält man

$$x^2 - y^2 = 7,$$

oder $(x + y)(x - y) = 7$, also nach a)

$$x - y = \mp 1. \quad (b)$$

Aus a) und b) ergeben sich nun unmittelbar die Lösungen

$$x = \mp 4, \; y = \mp 3.$$

Zweite Lösung. Aus 2) erhält man $x = \frac{21 - y^2}{y}$.

Setzt man diesen Werth in Gleichung 1) statt x ein, so ist

$$\left(\frac{21 - y^2}{y}\right)^2 + (21 - y^2) = 28,$$

$$\frac{441 - 42y^2 + y^4}{y^2} + 21 - y^2 = 28,$$

$$441 - 42y^2 + y^4 + 21y^2 - y^4 = 28y^2,$$
$$49y^2 = 441,$$
$$y^2 = 9,$$
$$y = \mp 3.$$

IV. $\begin{cases} 1)\ x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 120 - 2y \\ 2)\ xy - y^2 = 8. \end{cases}$

Aus 1) ergiebt sich

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2(x + y) = 120,$$

oder $(x + y)^2 + 2(x + y) = 120,$

also $x + y = \begin{cases} -12 \\ +10, \end{cases}$ daher $x = \begin{cases} -12 - y \\ +10 - y. \end{cases}$

Setzt man einen dieser Werthe in der zweiten Gleichung statt x ein, so erhält man eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten.

V. $\begin{cases} 1)\ x^2 - y^2 = a \\ 2)\ x \cdot y = b. \end{cases}$

Aus 1) ergiebt sich

$$(x^2 - y^2)^2 = a^2, \text{ oder}$$

$$3)\ x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^2.$$

Da nun $xy = b$, also $4x^2y^2 = 4b^2$ ist, so erhält man aus 3)

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = a^2 + 4b^2,$$

oder $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + 4b^2,$

also $x^2 + y^2 = \mp\sqrt{a^2 + 4b^2}.$

Da nun $x^2 - y^2 = a$ ist, so ist folglich

$$x^2 = \frac{a \mp \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2};\ x = \mp\sqrt{\frac{a \mp \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}};$$

$$y^2 = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2};\ y = \mp\sqrt{\frac{-a \mp \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}}.$$

Zu derselben Lösung gelangt man, wenn man aus der zweiten Gleichung x bestimmt, nämlich $x = \frac{b}{y}$, und diesen Werth in der ersten Gleichung für x einsetzt.

VI. $$\begin{cases} 1)\ x^2 + xy + y^2 = a \\ 2)\ x + \sqrt{xy} + y = b. \end{cases}$$

Aus 1) erhält man

$$(x + y)^2 = a + xy,$$

aus 2)

$$(x + y)^2 = \left(b - \sqrt{xy}\right)^2.$$

Es ist also $a + xy = \left(b - \sqrt{xy}\right)^2 = b^2 - 2b\sqrt{xy} + xy$,

daher $a = b^2 - 2b\sqrt{xy}$,

$$\sqrt{xy} = \frac{b^2 - a}{2b},$$

$$xy = \left(\frac{b^2 - a}{2b}\right)^2 = p.$$

Aus 1) erhält man folglich

$$x^2 + 2xy + y^2 = a + p,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = a - 3p.$$

Also ist $x + y = \mp\sqrt{a + p}$,

$$x - y = \mp\sqrt{a - 3p},$$

daher $$x = \frac{\mp\sqrt{a + p} \mp \sqrt{a - 3p}}{2},$$

$$y = \frac{\mp\sqrt{a \pm p} \pm \sqrt{a - 3p}}{2}.$$

VII. $$\begin{cases} 1)\ x^4 + y^4 = a \\ 2)\ x + y = b. \end{cases}$$

Aus 2) ergiebt sich

$$(x + y)^4 = b^4,$$

oder 3) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = b^4$.

Subtrahirt man Gleichung 1) von Gleichung 3), so erhält man:

$$4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = b^4 - a,$$

$$\text{oder } 4xy\left(x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2\right) = b^4 - a,$$

$$\text{oder } 4xy\left(x^2 + 2xy + y^2 - \frac{1}{2}xy\right) = b^4 - a,$$

$$\text{oder } 4xy\left((x + y)^2 - \frac{1}{2}xy\right) = b^4 - a.$$

Da $x + y = b$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$4xy\left(b^2 - \frac{1}{2}xy\right) = b^4 - a.$$

Bezeichnet man xy durch p, so ist

$$4p\left(b^2 - \frac{1}{2}p\right) = b^4 - a,$$

$$\text{oder } 4b^2p - 2p^2 = b^4 - a.$$

Es ist alsdann gegeben $xy = p$, $x + y = b$, und hieraus lassen sich die Werthe von x und y finden. (Vergl. I.)

Aufgaben.

I. Gegebene Gleichungen.

1) $8x^2 = 72$;
2) $4x^2 - 7 = 3x^2 + 9$;
3) $8 - x^2 = 3x^2 - 8$;
4) $(x + 3)^2 + 7 = 71$;
5) $9x^2 + 5 = 17$;
6) $3x^2 - 8 = 14x^2 - 47$;
7) $\sqrt{x^2 + 5} = 21 : \sqrt{x^2 + 5}$;
8) $x^2 = 2xb - b^2 + a^2$;
9) $16 - 8\sqrt{x} = 25 - x$;
10) $\frac{13}{4x} + \frac{\sqrt{10\frac{9}{16} - x^2}}{x} = \frac{x}{2}$;
11) $\sqrt{a^2 - x^2} : x = (x : b) - (a : x)$;
12) $x^2 + 2x = 35$;
13) $x^2 - 8x = -15$;
14) $x^2 - 15x = -56$;
15) $x^2 + 2x = 63$;
16) $x^2 - x = 12$;
17) $10x^2 + x = 21$;
18) $6x^2 - 2x = 20$;
19) $10x^2 - 23x = -12$;
20) $\frac{x^2}{10} - 3\frac{3}{5}x = -18$;

21) $x + 7\sqrt{x} = 60$;

22) $x + \sqrt{x} = 20$;

23) $\sqrt{x+3} + x = 9$;

24) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{3x+7} = \sqrt{10x+6}$;

25) $x^4 - 13x^2 = -36$;

26) $(x-2)(x+5) = x(2x-3) - 2$;

27) $(5x+3)(4x-7) = 13$;

28) $9\frac{1}{3}x^2 - 90\frac{1}{3}x + 195 = 0$;

29) $x^2 + 8x = 5$;

30) $8x^2 - 7x + 34 = 0$;

31) $6x - 30 = 3x^2$;

32) † $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{4}$;

33) † $x - \frac{x-2}{x-6} = 2x - 11$;

34) $-5 + \frac{1}{x+1} = \frac{20}{x^2+x} - \frac{32}{x}$;

35) $mnx + gn = mfx^2 + gfx$;

36) $(a-b)^2 + 2x(a+b)\sqrt{ab} = abx^2$;

37) $\frac{dx^2}{f} + \frac{ace}{g} = \frac{acx}{f} + \frac{edx}{g}$;

38) $\frac{x^2}{a+b} + \frac{a-b}{4} = x + \frac{b^2}{4(a+b)}$;

39) $\frac{a^2x^2}{c} - \frac{a^2-ab}{a+b} = (a-b)x + \frac{b^2x^2}{c}$;

40) $ax = b + \sqrt{cx}$;

41) $b^2x - c = \frac{-(ab+c)(1+c)x + ab^3x^2}{bd\sqrt{c}} + \frac{bx^2\sqrt{c}}{d} + 1$;

42) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x \cdot y = 18; \end{cases}$

43) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x \cdot y = 96; \end{cases}$

44) $\begin{cases} xy = 18 \\ \frac{x}{y} = 2; \end{cases}$

45) $\begin{cases} (x+y) : x = 5 : 3 \\ x \cdot y = 6; \end{cases}$

46) $\begin{cases} x \cdot (x+y) = 27 \\ y \cdot (x+y) = 54; \end{cases}$

47) $\begin{cases} x^2y = 30 - xy^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}; \end{cases}$

48) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 175 \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$

49) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 37 \\ x - y = 1; \end{cases}$

50) † $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \\ x = 1 + 3y; \end{cases}$

51) † $x + y = xy = x^2 - y^2$;

52) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 189 \\ x + y = 9; \end{cases}$

53) $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 9 \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 18; \end{cases}$

54) † $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x^2 - xy + y^2 = 13; \end{cases}$

55) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y = 21; \end{cases}$

56) $\begin{cases} xy + x = 36 \\ xy - y = 24; \end{cases}$

57) $\begin{cases} (x+y)^2 + x + y = \frac{43}{36} + 2xy \\ x(x+1) - y(y+1) = -\frac{11}{36}; \end{cases}$

58) $\begin{cases} \frac{3x + 4y + 3}{xy} = 2 \\ 3x - 4y = 25; \end{cases}$

59) $\begin{cases} x + \sqrt{xy} = 18 \\ x + y = 15; \end{cases}$

60) $\begin{cases} x + \sqrt{xy} = c \\ x + y = a; \end{cases}$

61) $\begin{cases} \frac{3x + 5y}{2} = 5x + 2 \\ \frac{x + 7}{y} = x - 1; \end{cases}$

62) $\begin{cases} \frac{2x}{x^2 - y^2} = \frac{y}{x + y} \\ \frac{x}{y} = \frac{y + 3}{2}; \end{cases}$

63) † $\begin{cases} x + y = a \\ x^5 + y^5 = b; \end{cases}$

64) $\begin{cases} (x+y)^2 + x + y = a + 2xy \\ x(x+1) - y(y+1) = b; \end{cases}$

65) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a \\ y^2 = 2xz + b \\ cx = dz; \end{cases}$

66) $\begin{cases} x(y+z) = a \\ y(x+z) = b \\ z(x+y) = c; \end{cases}$

67) $\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = a \\ \frac{xyz}{y+z} = b \\ \frac{xyz}{x+z} = c. \end{cases}$

II. Aufgaben, für welche die Gleichungen erst gesucht werden müssen.

68) Ein rechtwinkliger viereckiger Garten ist dreimal so lang als breit und hat 43200 Quadratfuß Inhalt. Wie lang und wie breit ist der Garten?

69) Bei zwei quadratisch angelegten Baumschulen verhält sich die Anzahl der Bäume, welche die Seite der einen bilden, zu der Anzahl der Bäume, welche die Seite der andern bilden, wie 7 : 8. Wie viel Bäume enthält jede Baumschule, wenn die erste 240 Bäume weniger enthält, als die zweite?

70) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Cathete gleich 2 Fuß. Die Hypotenuse verhält sich zur andern Cathete wie 5 : 3. Wie groß sind die beiden unbekannten Seiten?

71) Wenn in einer Gesellschaft jedes Mitglied so viel Sgr. bezahlt, als der dritte Theil der Mitglieder beträgt, so fehlen 8 Sgr. an einer bestimmten Summe; bezahlt aber jedes Mitglied so viel Sgr., als die Hälfte der Mitglieder beträgt, so werden 2 Thlr. 28 Sgr. mehr erhalten, als obige Summe beträgt. Wie stark war die Gesellschaft?

72)† Die Zahl 30 in zwei Faktoren zu zerlegen, die sich wie 5 zu 8 verhalten. Welche Faktoren sind es?

73) Bei zwei Zahlen ist die Differenz 24 mal größer als das Verhältniß der ersten zur zweiten, hingegen 6 mal größer als das Verhältniß der zweiten zur ersten. Welche Zahlen sind es?

74) Die Zahl 16 in zwei solche Theile zu zerlegen, daß die Summe der Quadrate dieser Theile gleich 178 wird. Welche Theile sind es?

75) Ein viereckiger rechtwinkliger Garten hat den Umfang 896′, die Diagonale 320′. Wie lang und wie breit ist der Garten?

76) Ein viereckiger rechtwinkliger Garten hat 20000 □′ Inhalt und 600′ Umfang. Wie lang und wie breit ist der Garten?

77) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse gleich 20 Fuß, der Unterschied der Catheten gleich 7 Fuß. Welches sind die Catheten?

78) Ein viereckiger rechtwinkliger Garten ist um 5000 Quadratfuß größer als das Quadrat über der kleinern, und um 7500 Quadratfuß kleiner als das Quadrat über der größern Seite. Welches sind die Seiten?

79) Ein viereckiger rechtwinkliger Garten ist um 2000 Quadratfuß kleiner als das Quadrat über der Länge; das Quadrat über der Länge ist um 3600 Quadratfuß größer als das Quadrat über der Breite. Wie lang und wie breit ist der Garten?

80) Von einer Arbeit vollendet A die Hälfte und hierauf B die andere Hälfte in etwas kürzerer Zeit. Zusammen haben sie 14 Tage gearbeitet und erhalten schließlich gleichviel Bezahlung. Da B schneller arbeitet als A, so erhält er zwar höheres Tagelohn, hingegen bekommt A das Tagelohn für eine größere Anzahl von Tagen. Für die Arbeitszeit des A hätte B 2 Thlr. 4 Sgr., hingegen A für die Arbeitszeit des B nur 1 Thlr. 6 Sgr. erhalten. Wie lange hat jeder gearbeitet?

81) Zwei Couriere werden einander entgegengeschickt und haben, als sie sich treffen, zusammen 21 Meilen zurückgelegt. Der erste würde zu dem vom zweiten zurückgelegten Wege $4\frac{1}{2}$ Stunde, der zweite hingegen zu dem vom ersten zurückgelegten Wege 8 Stunden gebraucht haben. Wie viel Stunden waren beide unterwegs?

82) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse um $4\frac{2}{7}$ Fuß größer als die eine Cathete, und um $1\frac{1}{7}$ Fuß größer als die andere Cathete. Welches sind die drei Seiten?

83) Der Umfang eines Rechtecks beträgt 280 Fuß. Wird jede Seite desselben um den 6ten Theil der Höhe verlängert, so beträgt der Inhalt 6300 Quadratfuß. Wie groß ist die Höhe?

84) Ein Kaufmann kauft eine Partie Tücher, im Ganzen für 48 Thlr. Er verkauft hernach das einzelne Stück um 1 Thlr. theurer und erhält dadurch die ausgelegten 48 Thlr. schon wieder, als noch 4 Tücher unverkauft sind. Wie viele Tücher hatte er gekauft?

85) Es will Jemand eine Uhr ausspielen und giebt deshalb eine Anzahl Loose aus, welche ihm 60 Thlr. bringen. Hätte er das Loos um einen Thaler billiger gegeben, so hätte er 10 Loose mehr machen müssen, um 60 Thlr. zu erhalten. Wie viel Loose hatte er gemacht?

86) (87) Ein Weinhändler verkauft von zwei Sorten Wein zusammen 30 Flaschen für 448 Sgr. Von der bessern Sorte kostet zwar die Flasche 2 Sgr. mehr, als von der andern; da er aber mehr Flaschen von der geringern Sorte verkauft, so erhält er doch für beide Sorten gleichviel. Was kostete die Flasche einer jeden der beiden Sorten?

87) (86) Es verkauft Jemand ein Stück mit 36 Thlr. und gewinnt so viel Prozente, als $^6/_{25}$ des Einkaufspreises betragen. Wie theuer hat er das Stück eingekauft?

88) Es kauft Jemand 10 Actien zu gleichen Preisen. Nach einiger Zeit verkauft er dieselben wieder zusammen für 2250 Thlr. und gewinnt so viel Prozente, als der dritte Theil einer Actie beim Einkaufspreis betrug. Wie groß war der Einkaufspreis einer Actie?

89) Jemand gewinnt beim Verkaufe einer Actie so viel Prozente, als der $8^4/_5$ Theil des Verkaufspreises beträgt; im Ganzen gewinnt er 8 Thlr. Wie groß war der Einkaufspreis?

90) Es soll eine Zahl gefunden werden, die zu $2^1/_4$ addirt dasselbe giebt, wie $2^1/_4$ durch diese Zahl dividirt. Welche Zahl ist es?

91) Beim Herabfallen eines Steines in einen Brunnen hört man den Stein nach 4 Sekunden aufschlagen. Wie tief war der Brunnen, wenn angenommen wird, daß ein fallender Körper in x Secunden den Weg $x^2.15'$, hingegen der Schall in x Secunden den Weg $x.1050'$ zurücklegt?

92) Wäre ein Garten 1 Fuß breiter, so hätte er 15720 Quadratfuß Inhalt; wäre er aber 1 Fuß weniger lang, so hätte er 15470 Quadratfuß Inhalt. Wie lang und wie breit ist der Garten?

93) Zwei Kaufleute legen 2000 Thlr. zu einem Handelsgeschäft zusammen. Der eine läßt sein Geld 17 Monate stehen und erhält an Einlage und Gewinn 1710 Thlr. zurück; der andere läßt sein Geld 12 Monate stehen und erhält an Einlage und Gewinn 1040 Thlr. Wie viel hatte jeder eingelegt?

94) Zwei getrennt von einander liegende quadratische Wiesenflächen sind jede von einem 4 Fuß (12 auf eine Ruthe) breiten Graben rings umgeben und haben mit diesen Gräben zusammen einen Flächeninhalt von $309^7/_9$ Quadratruthen. Die Maßzahlen der Seiten beider Wiesen (auf die Ruthe als Einheit bezogen), geben mit einander multiplicirt die Zahl $133^1/_3$. Wie groß ist die Seite jeder Wiese?

95) Ein Wasserbehälter kann durch 2 Röhren A und B gefüllt werden. Läßt man durch die Röhre A so lange Wasser einströmen, daß die Röhre B während dieser Zeit $^2/_3$ des Behälters hätte füllen können und läßt hernach durch die Röhre B den Behälter vollständig füllen, so dauert das Anfüllen des Behälters im Ganzen 2 Stunden länger, als wenn beide Röhren von Anfang an gleichzeitig in Thätigkeit gewesen wären. In letzterem Falle hätte die Röhre A die Hälfte von dem geliefert, was bei dem ersten Versuche die Röhre B noch nachzufüllen hatte. In welcher Zeit füllt jede Röhre für sich allein den Behälter?

96) Ein Schiff war schon 4 Wochen unterwegs, als es noch eine bedeutende Anzahl Matrosen eines gescheiterten Schiffes aufnahm. Obwohl der anfangs mitgenommene Vorrath an Brot für 500 Mann auf 9 Wochen gereicht hätte, so reichte der Vorrath, trotzdem daß die tägliche Ration um $^1/_2$ Pfund verringert wurde, für die jetzt vergrößerte Zahl blos noch auf 6 Wochen aus, weil nämlich 10 % des anfänglichen Vorraths verdorben waren, und außerdem die Ratten so viel gefressen hatten, als

anfangs 10 Mann in 11 Wochen erhielten. Wäre die Ration nicht verringert worden, so wären nach 4 Wochen blos noch 3640 Pfund vorhanden gewesen. Die Offiziere, $^1/_{20}$ der anfänglichen Mannschaft, erhielten täglich $^1/_4$ so viel Quart Wein, als anfangs jeder Mann täglich Pfunde Brot erhalten hatte, und brauchten wöchentlich 70 Quart Wein. Wie stark war die Mannschaft, wie groß die tägliche Ration, und wie viel Matrosen wurden aufgenommen?

97) Ein genau rechtwinkliger, aber nicht würfeliger Stein soll als Fußgestell benutzt, und es sollen deshalb die 4 Seitenwände abgeschliffen werden. Je nachdem man aber die verschiedenen Flächen des Steines als Grundflächen benutzt, erhält man als Summe der Oberflächen von je vier Seitenwänden 4896, 4970, oder 5106 Quadratzoll. Wie groß sind die drei verschiedenen Seitenkanten des Steines?

98) Die Summe der inneren Glieder einer geometrischen Proportion ist gleich a, die der äußeren gleich b, und die Summe der Quadrate aller vier Glieder ist gleich c. Welche Proportion ist es?

Auflösungen.

1) $x = \mp 3$; 2) $x = \mp 4$; 3) $x = \mp 2$; 4) $x = +5; -11$;

5) $x = \mp \sqrt{4:3} = \mp 1{,}154\ldots$; 6) $x = \mp \sqrt{39:11} = \mp 1{,}882\ldots$;

7) $x = \mp 4$; 8) $x = b \mp a$; 9) $\sqrt{x} = -1; +9$; 10) $x = \mp 3$;

11) $x = \mp \sqrt{2ab - b^2}$; 12) $x = 5; -7$; 13) $x = 3; 5$;

14) $x = 7; 8$; 15) $x = 7; -9$; 16) $x = +4; -3$;

17) $x = \frac{7}{5}; -\frac{3}{2}$; 18) $x = 2; -\frac{5}{3}$; 19) $x = \frac{4}{5}; \frac{3}{2}$;

20) $x = 30; 6$; 21) $\sqrt{x} = 5; -12$; 22) $\sqrt{x} = 4; -5$;

23) $x = 6$*); 24) $x = 3; 19$; 25) $x = \mp 2; \mp 3$; 26) $x = 2; 4$;

27) $x = 2; -\frac{17}{20}$; 28) $x = 6\frac{3}{7}; 3\frac{1}{4}$; 29) $x = -4 \mp \sqrt{21}$;

30) $x = \frac{7 \mp \sqrt{-1039}}{16}$; 31) $x = 1 \mp \sqrt{-9}$; 32) $x = +3; -\frac{1}{3}$;

33) $x = 8$; 34) $x = 6; -\frac{2}{5}$; 35) $x = \frac{n}{f}; -\frac{g}{m}$;

36) $x = \left\{(a+b) \mp \sqrt{2a^2 + 2b^2}\right\} : \sqrt{ab}$; 37) $x = \frac{ac}{d}; \frac{cf}{g}$;

---

*) Der zweite Werth $x = 13$ gehört zu der Gleichung

$$-\sqrt{x+3} + x = 9.$$

38) $x = \frac{1}{2}\left\{(a+b) \mp \sqrt{3b^2+2ab}\right\}$; 39) $x = \frac{c \mp \sqrt{c^2+4ac}}{2(a+b)}$;

40) $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{c} + \sqrt{c+4ab}}{2a}$; 41) $x = \frac{bd\sqrt{c}}{ab+c}; \frac{1+c}{b^2}$;

42) $x = 3;\ 6;\ y = 6;\ 3$; 43) $x = 12;\ -8;\ y = 8;\ -12$;

44) $x = \mp 6;\ y = \mp 3$; 45) $x = \mp 3;\ y = \mp 2$;

46) $x = \mp 3;\ y = \mp 6$; 47) $x = 3;\ 2;\ y = 2;\ 3$;

48) $x = \mp 4;\ y = \mp 3$; 49) $x = 4;\ -3;\ y = 3;\ -4$;

50) $\sqrt{x} = 7;\ 2;\ \sqrt{y} = 4;\ -1$; 51) $x = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2};\ y = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$;

52) $x = 5;\ 4;\ x = 4;\ 5$; 53) $x = \mp 1;\ y = \mp 4$;

54) $x = \mp 4;\ y = \mp 3$; 55) $x = 4;\ -3;\ y = 5;\ 12$;

56) $x = 9;\ 4;\ y = 3;\ 8$; 57) $x = \frac{1}{3};\ -\frac{4}{3};\ y = \frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}$;

58) $x = 11;\ \frac{4}{3};\ y = 2;\ -\frac{21}{4}$; 59) $x = 12;\ 13\frac{1}{2};\ y = 3;\ 1\frac{1}{2}$;

60) $x = \frac{a + 2c \mp \sqrt{a^2+4ac-4c^2}}{4};\ y = \frac{3a - 2c \pm \sqrt{a^2+4ac-4c^2}}{4}$;

61) $x = 3;\ -\frac{13}{7};\ y = 5;\ -\frac{9}{5}$; 62) $x = 9;\ -1;\ y = 3;\ -2$;

63) Setzt man $\frac{1}{2}\left\{a^2 \mp \sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}\right\} = p$, so ist

$$x = \frac{1}{2}\left\{a \mp \sqrt{a^2-4p}\right\};\quad y = \frac{1}{2}\left\{a \pm \sqrt{a^2-4p}\right\};$$

64) $x = \frac{-1 \mp \sqrt{2a+2b+1}}{2};\ y = \frac{-1 \mp \sqrt{2a-2b+1}}{2}$ *);

65) $x = \frac{d\sqrt{a-b}}{c+d};\ y = \frac{\sqrt{2acd + b(c^2+d^2)}}{c+d};\ z = \frac{c\sqrt{a-b}}{c+d}$;

66) Bezeichnet man $(b+c-a)$ durch A, $(a+c-b)$ durch B, $(a+b-c)$ durch C, so ist $x = \mp\sqrt{BC:2A}$;
$y = \mp\sqrt{AC:2B}$; $z = \mp\sqrt{AB:2C}$;

---

*) Die zwei Werthe von y können beliebig mit den für x gefundenen Werthen verbunden werden, so daß man also 4 Paare zusammengehöriger Werthe von x und y hat.

67) Bezeichnet man $(-ab+ac+bc)$ durch A, $(ab-ac+bc)$ durch B, $(ab+ac-bc)$ durch C, abc durch P, so ist $x=\mp\sqrt{2PB:AC}$; $y=\mp\sqrt{2PA:BC}$; $z=\mp\sqrt{2PC:AB}$;

68) 120 Fuß breit, 360 Fuß lang; 69) I. = 784 B., II. = 1024 B.;

70) $1\frac{1}{2}$ Fuß; $2\frac{1}{2}$ Fuß; 71) 24 Personen; 72) 4,330... und 6,928...;

73) I. = 12 oder 4; II. = 24 oder − 8; 74) 13 und 3;

75) 192 Fuß lang, 256 Fuß breit, oder umgekehrt;

76) 200 Fuß lang, 100 Fuß breit, oder umgekehrt;

77) 10,202... Fuß und 17,202... Fuß; 78) 100 Fuß; 150 Fuß;

79) 100 Fuß lang; 80 Fuß breit;

80) A arbeitete 8 Tage und erhielt täglich 6 Sgr.; B arbeitete 6 Tage und erhielt täglich 8 Sgr.;

81) Jeder 6 Stunden; der erste macht in dieser Zeit 12, der andere 9 Meilen;

82) 4,272... Fuß; 7,415... Fuß; 8,558... Fuß; 83) 60′, oder 108′;

84) 16 Stück; 85) 20 Loose; 86) Zu $33\frac{1}{3}$ Thlr.;

87) 14 Flaschen zu 16 Sgr., 16 Flaschen zu 14 Sgr.; 88) 150 Thlr.;

89) 80 Thlr.; 90) $\frac{3}{4}$, oder − 3; 91) 215,9... Fuß;

92) Die Breite = 130 Fuß oder 119 Fuß; die Länge = 120 Fuß oder 131 Fuß;

93) Der erste 1200 Thlr., der zweite 800 Thlr.;

94) I. = 10 Ruthen; II. = $13\frac{1}{3}$ Ruthen;

95) Die erste in 6, die zweite in 3 Stunden;

96) Anfangs 400 Matrosen, von denen jeder täglich 2 Pfd. Brot erhielt; aufgenommen wurden 120 Matrosen;

97) 34, 35 und 37 Zoll;

98) Die Proportion ist $\frac{1}{2}\left\{b-\sqrt{c-a^2}\right\} : \frac{1}{2}\left\{a-\sqrt{c-b^2}\right\} =$

$$= \frac{1}{2}\left\{a+\sqrt{c-b^2}\right\} : \frac{1}{2}\left\{b+\sqrt{c-a^2}\right\}.$$

Druck von Weniger & Co in Dessau.

Gerlach, Hermann von

Lehrbuch der Mathematik Für den Schul- und Selbst-Unterricht

Bd.: 1

Dessau 1867